CAPÍTULO 4

Rectas, parábolas y sistemas de ecuaciones

Para el problema de la contaminación industrial, algunas personas recomiendan una solución basada en el mercado: dejar que los fabricantes contaminen, pero hacer que ellos paguen por ese privilegio. Entre mayor contaminación mayor pago, o gravamen. La idea es dar a los fabricantes un incentivo para no contaminar más de lo necesario.

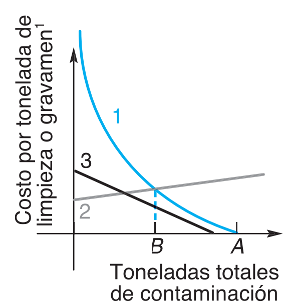
¿Funciona este enfoque? En la figura de abajo, la línea 1 representa el costo por tonelada de reducción de contaminación. Una compañía que contamina de manera indiscriminada puede casi siempre reducir en alguna forma su contaminación a un costo mínimo. Sin embargo, conforme la cantidad de contaminación se reduce, el costo por tonelada se eleva y eventualmente se dispara. Esto se ilustra por medio de la línea que se eleva indefinidamente conforme las toneladas totales de contaminación producidas se aproximan a cero.

La línea 2 es un esquema de gravamen que es menos estricto con operaciones que se efectúan con limpieza, pero que cobra una cuota creciente por tonelada conforme la cantidad de contaminación total crece.

En contraste, la línea 3 es un esquema en el que los fabricantes que contaminan poco pagan un gravamen alto por tonelada, mientras que los grandes contaminadores pagan menos por tonelada (pero más de manera global). Surgen preguntas de equidad, ¿qué tan bien funcionará cada esquema como una medida de control de contaminación?

Al enfrentarse con un impuesto por contaminar, una compañía tiende a disminuir la contaminación *mientras ahorre más en costos de impuestos que en costos por reducción de contaminación*. Los esfuerzos por reducción continúan hasta que el ahorro de impuestos y los costos por reducción empiezan a equilibrarse.

La segunda mitad de este capítulo estudia los sistemas de ecuaciones. Aquí, las líneas 1 y 2 representan un sistema de ecuaciones, y las líneas 1 y 3 representan un sistema alterno. Una vez que haya aprendido cómo resolver sistemas de ecuaciones, puede regresar a esta página y verificar que el esquema de la línea 2 conduce a una reducción de contaminación de una cantidad A a una cantidad B, mientras que el esquema de la línea 3 no funciona como una medida de control de contaminación, ya que deja el nivel de contaminación en el nivel A.



[1]Técnicamente, este es el costo *marginal* por tonelada (véase la sec. 10.3).

OBJETIVO Desarrollar la noción de pendiente y formas diferentes de las ecuaciones de rectas.

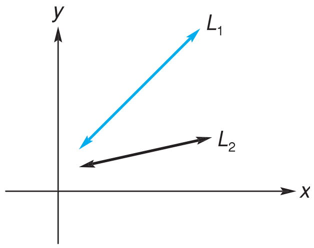


FIGURA 4.1 La recta L_1 está "más inclinada" que la recta L_2.

4.1 RECTAS

Pendiente de una recta

Muchas relaciones entre cantidades pueden representarse de manera adecuada por medio de rectas. Una característica de una recta es su "inclinación". Por ejemplo, en la figura 4.1 la recta L_1, crece más rápido que la recta L_2 cuando va de izquierda a derecha. En este sentido L_1 está más inclinada con respecto a la horizontal.

Para medir la inclinación de una recta usamos la noción de *pendiente*. En la figura 4.2, conforme nos movemos a lo largo de la recta L, de (1,3) a (3,7), la coordenada x aumenta de 1 a 3 y la coordenada y aumenta de 3 a 7. La tasa promedio de cambio de y con respecto a x es la razón

$$\frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \frac{7-3}{3-1} = \frac{4}{2} = 2.$$

La razón de 2 significa que por cada unidad de aumento en x hay un *aumento* de 2 unidades en y. Debido a este aumento, la recta *se eleva* de izquierda a derecha. Puede demostrarse que sin importar cuáles puntos de L se elijan para calcular el cambio en y al cambio en x, el resultado siempre es 2, al cual llamamos *pendiente* de la recta.

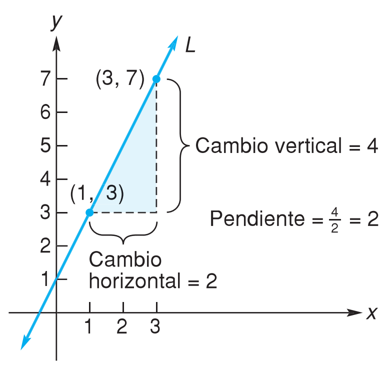


FIGURA 4.2 Pendiente de una recta.

No tener pendiente no significa tener una pendiente igual a cero.

Definición

Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos diferentes sobre una recta no vertical. La pendiente de la recta es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \left(= \frac{\textit{cambio vertical}}{\textit{cambio horizontal}} \right). \qquad \textbf{(1)}$$

Una recta vertical no tiene pendiente, porque cualesquiera dos puntos sobre ella deben tener $x_1 = x_2$ [véase la fig. 4.3 (a)], lo que da un denominador de cero en la ecuación (1). Para una recta horizontal, cualesquiera dos puntos deben tener $y_1 = y_2$ [véase la fig. 4.3 (b)]. Esto da un numerador de cero en la ecuación (1) y, por tanto, la pendiente de la recta es cero.

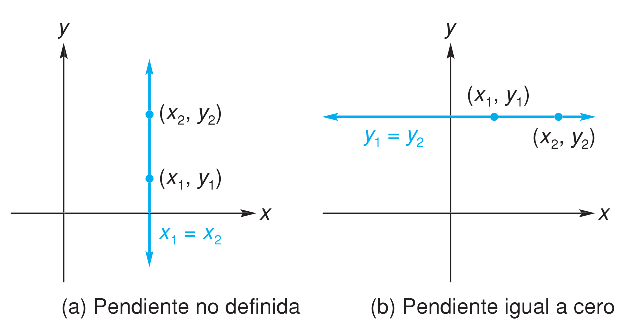


FIGURA 4.3 Rectas vertical y horizontal.

Este ejemplo muestra cómo puede interpretarse la pendiente.

EJEMPLO 1 Relación precio-cantidad

La recta de la figura 4.4 *muestra la relación entre el precio p de un artículo (en dólares) y la cantidad q de artículos (en miles), que los consumidores comprarán a ese precio. Determinar e interpretar la pendiente.*

■ ***Principios en práctica 1***

Relación precio-tiempo

Un doctor compró un automóvil nuevo en 1991 por $32,000. En 1994, él lo vendió a un amigo en $26,000. Dibuje una recta que muestre la relación entre el precio de venta del automóvil y el año en el que se vendió. Determine e interprete la pendiente.

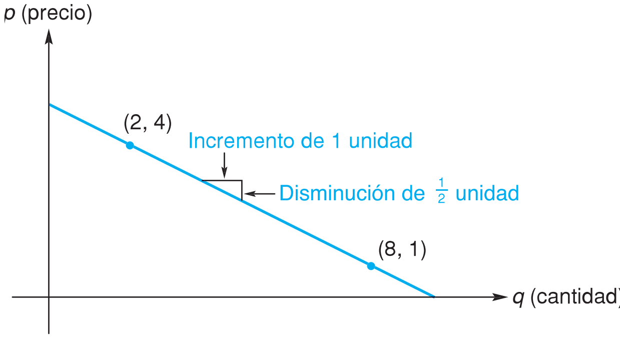


FIGURA 4.4 Recta precio-cantidad.

Solución: en la fórmula de la pendiente (1), remplazamos x por q y y por p. En la figura 4.4, podemos seleccionar cualquier punto como (q_1, p_1). Haciendo $(2, 4) = (q_1, p_1)$ y $(8, 1) = (q_2, p_2)$, tenemos

$$m = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} = \frac{1 - 4}{8 - 2} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

La pendiente es negativa, $-\frac{1}{2}$. Esto significa que por cada unidad que aumente la cantidad (un millar de artículos), corresponde una **disminución** de $\frac{1}{2}$ dólar en el precio de cada artículo. Debido a esta disminución, la recta **desciende** de izquierda a derecha.

■

En resumen, podemos caracterizar la orientación de una recta por su pendiente:

Pendiente cero:	recta horizontal.
Pendiente indefinida:	recta vertical.
Pendiente positiva:	recta que sube de izquierda a derecha.
Pendiente negativa:	recta que desciende de izquierda a derecha.

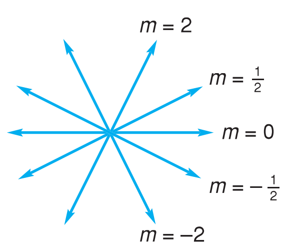


FIGURA 4.5 Pendientes de rectas.

En la figura 4.5 se muestran rectas con diferentes pendientes. Observe que *entre más cercana a cero es la pendiente, está más cerca de ser horizontal. Entre mayor valor absoluto tenga la pendiente, la recta estará más cercana a ser vertical*. Notamos que dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente o son verticales.

Ecuaciones de rectas

Si conocemos un punto y la pendiente de una recta, podemos encontrar una ecuación cuya gráfica sea esa recta. Suponga que la recta L tiene pendiente m y pasa a través del punto (x_1, y_1). Si (x, y) es *cualquier* otro punto sobre L (véase la fig. 4.6), podemos encontrar una relación algebraica entre x y y. Utilizando la fórmula de la pendiente con los puntos (x_1, y_1) y (x, y), se obtiene

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m,$$

$$y - y_1 = m(x - x_1). \qquad \textbf{(2)}$$

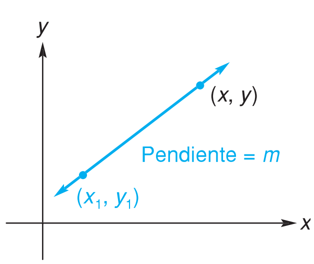


FIGURA 4.6 Recta que pasa por (x_1, y_1) con pendiente m.

Todo punto de L satisface la ecuación (2). También es cierto que todo punto que satisfaga la ecuación (2) debe pertenecer a L. Por tanto, la ecuación (2) es una ecuación para L, y se le da un nombre especial:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

*es la **forma punto-pendiente** de una ecuación de la recta que pasa por* (x_1, y_1) *y tiene pendiente m.*

Principios en práctica 2
Forma punto-pendiente

Un nuevo programa de matemáticas aplicadas en una universidad ha aumentado su matrícula en 14 estudiantes por año, durante los últimos cinco años. Si el programa tenía matriculados 50 estudiantes en su tercer año, ¿cuál es una ecuación para el número de estudiantes S en el programa como una función del número de años T desde su inicio?

EJEMPLO 2 Forma punto-pendiente

Determinar una ecuación de la recta que tiene pendiente 2 *y pasa por el punto* $(1, -3)$.

Solución: al utilizar una forma punto-pendiente con $m = 2$ y $(x_1, y_1) = (1, -3)$ se obtiene

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1), \\ y - (-3) &= 2(x - 1), \\ y + 3 &= 2x - 2, \end{aligned}$$

que puede reescribirse como

$$2x - y - 5 = 0.$$

Una ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados se puede encontrar con facilidad, como lo muestra el ejemplo 3.

Principios en práctica 3
Determinación de una recta a partir de dos puntos

Determine una ecuación de la recta que pasa por los puntos dados. Una temperatura de 41°F es equivalente a 5°C y una temperatura de 77°F es equivalente a 25°C.

EJEMPLO 3 Determinación de una recta a partir de dos puntos

Encontrar una ecuación de la recta que pasa por $(-3, 8)$ *y* $(4, -2)$.

Solución:

Estrategia: primero determinamos la pendiente de la recta a partir de los puntos dados. Después sustituimos la pendiente y uno de los puntos en la forma punto-pendiente.

La recta tiene pendiente

$$m = \frac{-2 - 8}{4 - (-3)} = -\frac{10}{7}.$$

Utilizando una forma punto-pendiente con $(-3, 8)$ como (x_1, y_1) se obtiene

$$\begin{aligned} y - 8 &= -\tfrac{10}{7}[x - (-3)], \\ y - 8 &= -\tfrac{10}{7}(x + 3), \\ 7y - 56 &= -10x - 30, \end{aligned}$$

o

$$10x + 7y - 26 = 0.$$

Seleccionar $(4, -2)$ como (x_1, y_1) daría un resultado equivalente.

Recuerde que un punto $(0, b)$ donde una gráfica interseca al eje y es llamado una intersección y (véase la fig. 4.7). Si se conocen la pendiente m y la intersección y, b, de una recta, una ecuación para la recta es [utilizando una forma punto-pendiente con $(x_1, y_1) = (0, b)$]

$$y - b = m(x - 0).$$

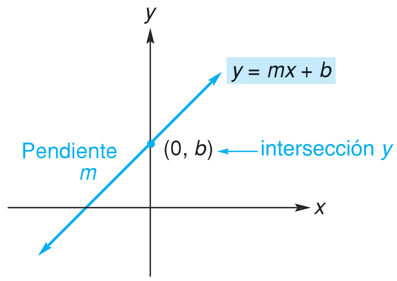


FIGURA 4.7 Recta con pendiente m e intersección y igual a b.

Al resolver para y se obtiene $y = mx + b$, llamada la *forma pendiente-ordenada al origen* de una ecuación de la recta:

$$y = mx + b$$

*es la **forma pendiente-ordenada al origen** de una ecuación de la recta con pendiente m e intersección b con el eje y.*

Principios en práctica 4

Determinación de la pendiente e intersección con el eje *y* de una recta

Una fórmula para la dosis recomendada (en miligramos) de medicamento para un niño de t años de edad es $y = \frac{1}{24}(t + 1)a$, en donde a es la dosis para un adulto. Un medicamento para aliviar el dolor que se puede comprar sin prescripción médica tiene $a = 1000$. Determine la pendiente y la intersección con el eje y de esta ecuación.

EJEMPLO 4 Forma pendiente-ordenada al origen

Encontrar una ecuación de la recta con pendiente 3 e intersección y igual a –4.

Solución: al utilizar la forma pendiente-ordenada al origen $y = mx + b$ con $m = 3$ y $b = -4$, se obtiene

$$y = 3x + (-4),$$
$$y = 3x - 4.$$

EJEMPLO 5 Determinación de la pendiente e intersección con el eje *y* de una recta

Hallar la pendiente y la intersección y de la recta con ecuación $y = 5(3 - 2x)$.

Solución:

Estrategia: reescribiremos la ecuación de modo que tenga la forma pendiente-ordenada al origen $y = mx + b$. Así, la pendiente es el coeficiente de x y la intersección y es el término constante.

Tenemos

$$y = 5(3 - 2x),$$
$$y = 15 - 10x,$$
$$y = -10x + 15.$$

Por tanto, $m = -10$ y $b = 15$, de modo que la pendiente es -10 y la intersección y es 15.

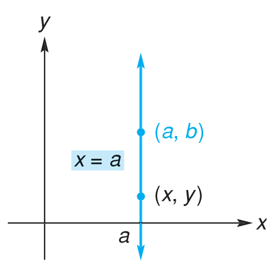


FIGURA 4.8 Recta vertical que pasa por (a, b).

Si una recta *vertical* pasa por (a, b) (véase la fig. 4.8), entonces cualquier otro punto (x, y) pertenece a la recta si y sólo si $x = a$. La coordenada y puede tener cualquier valor. De aquí que una ecuación de la recta es $x = a$. En forma análoga, una ecuación de la recta *horizontal* que pasa por (a, b) es $y = b$ (véase la fig. 4.9). Aquí la coordenada x puede tener cualquier valor.

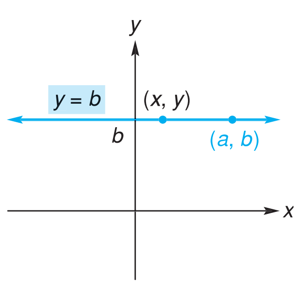


FIGURA 4.9 Recta horizontal que pasa por (a, b).

EJEMPLO 6 Ecuaciones de rectas horizontales y verticales

a. Una ecuación de la recta vertical que pasa por $(-2, 3)$ es $x = -2$. Una ecuación de la recta horizontal que pasa por $(-2, 3)$ es $y = 3$.

b. Los ejes x y y son rectas horizontal y vertical, respectivamente. Puesto que $(0, 0)$ pertenece a ambos ejes, una ecuación del eje x es $y = 0$ y una del eje y es $x = 0$.

De nuestro análisis podemos demostrar que toda línea recta es la gráfica de una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son constantes, y A y B no son ambas cero. Llamamos a ésta la *ecuación lineal general* (o *ecuación de primer grado*) **en las variables x y y,** y se dice que x y y están **relacionadas linealmente.** Por ejemplo, una ecuación lineal general para $y = 7x - 2$ es $(-7)x + (1)y + (2) = 0$. Recíprocamente, la gráfica de una ecuación lineal general es una recta.

La tabla 4.1 proporciona un buen resumen para usted.

No confunda las formas de las ecuaciones de las rectas horizontales y verticales. Recuerde cuál tiene la forma x = constante y cuál de ellas tiene la forma y = constante.

TABLA 4.1 Formas de ecuaciones de líneas rectas

Forma punto pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Forma pendiente ordenada al origen	$y = mx + b$
Forma lineal general	$Ax + By + C = 0$
Recta vertical	$x = a$
Recta horizontal	$y = b$

Principios en práctica 5

Conversión entre formas de ecuaciones de rectas

Determine una forma lineal general de la ecuación de conversión Fahrenheit-Celsius cuya forma punto pendiente es $F = \frac{9}{5}C + 32$.

EJEMPLO 7 Conversión entre formas de ecuaciones de rectas

a. *Hallar una forma lineal general de la recta cuya forma pendiente-ordenada al origen es*

$$y = -\tfrac{2}{3}x + 4.$$

Solución: al dejar un miembro que sea igual a cero, tenemos

$$\frac{2}{3}x + y - 4 = 0,$$

que es la forma lineal general con $A = \frac{2}{3}$, $B = 1$ y $C = -4$. Una forma lineal general alterna puede obtenerse quitando fracciones:

$$2x + 3y - 12 = 0.$$

Esto ilustra que una forma lineal general de una recta no es única.

b. *Hallar la forma pendiente-ordenada al origen de la recta que tiene una forma lineal general* $3x + 4y - 2 = 0$.

Solución: queremos la forma $y = mx + b$, de modo que resolvemos la ecuación dada para y. Tenemos

$$3x + 4y - 2 = 0,$$
$$4y = -3x + 2,$$
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2},$$

que es la forma pendiente-ordenada al origen. Notamos que la recta tiene pendiente de $-\frac{3}{4}$ e intersección con el eje y igual a $\frac{1}{2}$.

Principios en práctica 6

Gráfica de una ecuación lineal general

Haga un bosquejo de la gráfica de la ecuación de conversión Fahrenheit-Celsius que encontró en el principio en práctica 5. ¿Cómo puede utilizar esta gráfica para convertir una temperatura Celsius a Fahrenheit?

EJEMPLO 8 Graficación de una ecuación lineal general

Hacer el bosquejo de la gráfica $2x - 3y + 6 = 0$.

Solución:

Estrategia: ya que ésta es una ecuación lineal general, su gráfica es una línea recta. Por tanto, sólo necesitamos determinar dos puntos diferentes a fin de hacer el bosquejo. Encontraremos las intersecciones.

Si $x = 0$, entonces $-3y + 6 = 0$, de modo que la intersección y es 2. Si $y = 0$, entonces $2x + 6 = 0$, de modo que la intersección x es -3. Ahora podemos dibujar la recta que pasa por $(0, 2)$ y $(-3, 0)$. (Véase la fig. 4.10.)

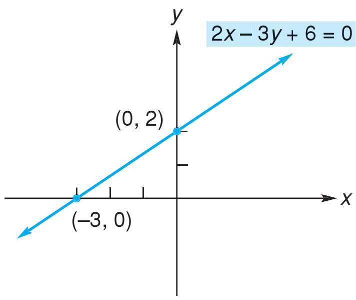


FIGURA 4.10 Gráfica de $2x - 3y + 6 = 0$.

Tecnología

Para graficar la ecuación del ejemplo 8 con una calculadora gráfica, primero expresamos a y en términos de x:

$$2x - 3y + 6 = 0,$$
$$3y = 2x + 6,$$
$$y = \tfrac{1}{3}(2x + 6).$$

En esencia, y se expresa como una función de x; la gráfica se muestra en la figura 4.11.

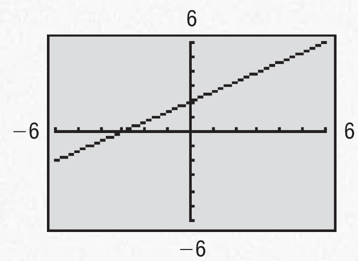


FIGURA 4.11 Gráfica de $2x - 3y + 6 = 0$. a partir de una calculadora.

Rectas paralelas y perpendiculares

Como se estableció previamente, existe una regla para rectas paralelas:

Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente o si ambas son verticales.

También existe una regla para rectas perpendiculares. Vea otra vez la figura 4.5 y observe que la recta con pendiente $-\frac{1}{2}$ es perpendicular a la recta con pendiente 2. El hecho de que la pendiente de cada una de estas rectas sea el recíproco negativo de la pendiente de la otra recta, no es coincidencia, como lo establece la siguiente regla.

Rectas perpendiculares

Dos rectas con pendientes m_1 *y* m_2 *son perpendiculares entre sí, si y sólo si,*

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}.$$

Además, una recta horizontal y una vertical son perpendiculares entre sí.

Principios en práctica 7

Rectas paralelas y perpendiculares

Muestre que un triángulo con vértices en $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ y $C(7, 7)$ no es un triángulo rectángulo.

EJEMPLO 9 Rectas paralelas y perpendiculares

La figura 4.12 muestra dos rectas que pasan por $(3, -2)$. *Una es paralela a la recta* $y = 3x + 1$, *y la otra es perpendicular a ella. Determinar las ecuaciones de estas rectas.*

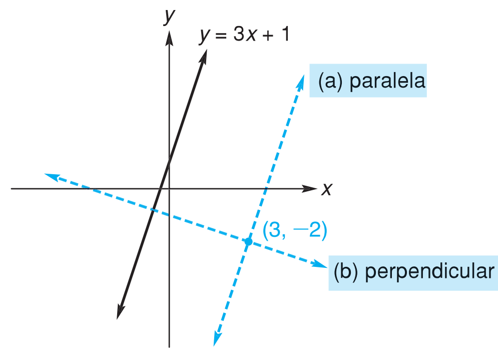


FIGURA 4.12 Rectas paralela y perpendicular a $y = 3x + 1$ (ejemplo 9).

Solución: la pendiente de $y = 3x + 1$ es 3. Por tanto, la recta que pasa por $(3, -2)$, que es *paralela* a $y = 3x + 1$, también tiene pendiente 3. Utilizando la forma punto-pendiente, obtenemos

$$\begin{aligned} y - (-2) &= 3(x - 3), \\ y + 2 &= 3x - 9, \\ y &= 3x - 11. \end{aligned}$$

La pendiente de la recta *perpendicular* a $y = 3x + 1$ debe ser $-\frac{1}{3}$ (el recíproco negativo de 3). Utilizando la forma punto-pendiente, obtenemos

$$\begin{aligned} y - (-2) &= -\tfrac{1}{3}(x - 3), \\ y + 2 &= -\tfrac{1}{3}x + 1, \\ y &= -\tfrac{1}{3}x - 1. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.1

En los problemas del 1 al 8 halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.

1. $(4, 1), (7, 10)$.
2. $(-3, 11), (2, 1)$.
3. $(4, -2), (-6, 3)$.
4. $(2, -4), (3, -4)$.
5. $(5, 3), (5, -8)$.
6. $(0, -6), (3, 0)$.
7. $(5, -2), (4, -2)$.
8. $(1, -7), (9, 0)$.

En los problemas del 9 al 24 determine una ecuación lineal general ($Ax + By + C = 0$) *de la recta que tiene las propiedades indicadas, y haga el bosquejo de cada recta.*

9. Pasa por $(2, 8)$ y tiene pendiente 6.
10. Pasa por el origen y tiene pendiente -5.
11. Pasa por $(-2, 5)$ y tiene pendiente $-\frac{1}{4}$.
12. Pasa por $(-\frac{5}{2}, 5)$ y tiene pendiente $\frac{1}{3}$.
13. Pasa por $(-6, 1)$ y $(1, 4)$.
14. Pasa por $(7, 1)$ y $(7, -5)$.
15. Pasa por $(3, -1)$ y $(-2, -9)$.
16. Pasa por $(0, 0)$ y $(2, 3)$.
17. Tiene pendiente 2 y su intersección con el eje y es 4.
18. Tiene pendiente 5 y su intersección con el eje y es -7.
19. Tiene pendiente de $-\frac{1}{2}$ y su intersección con el eje y es -3.
20. Tiene pendiente 0 y su intersección con el eje y es $-\frac{1}{2}$.

21. Es horizontal y pasa por $(-3, -2)$.

22. Es vertical y pasa por $(-1, 4)$.

23. Pasa por $(2, -3)$ y es vertical.

24. Pasa por el origen y es horizontal.

En los problemas del 25 al 34 encuentre, si es posible, la pendiente y la intersección con el eje y de la recta determinada por la ecuación, y haga el bosquejo de la gráfica.

25. $y = 4x - 6$.

26. $x - 1 = 5$.

27. $x + 2y - 3 = 0$.

28. $y + 4 = 7$.

29. $x = -5$.

30. $x - 9 = 5y + 3$.

31. $y = 3x$.

32. $y - 7 = 3(x - 4)$.

33. $y = 1$.

34. $2y - 3 = 0$.

En los problemas del 35 al 40 determine una forma lineal general y la forma pendiente-ordenada al origen de cada ecuación.

35. $2x = 5 - 3y$.

36. $3x + 2y = 6$.

37. $4x + 9y - 5 = 0$.

38. $2(x - 3) - 4(y + 2) = 8$.

39. $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = -4$.

40. $y = \frac{1}{300}x + 8$.

En los problemas del 41 al 50 determine si las rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos.

41. $y = 7x + 2, \quad y = 7x - 3$.

42. $y = 4x + 3, \quad y = 5 + 4x$.

43. $y = 5x + 2, \quad -5x + y - 3 = 0$.

44. $y = x, \quad y = -x$.

45. $x + 2y + 1 = 0, \quad y = -2x$.

46. $x + 2y = 0, \quad x + y - 4 = 0$.

47. $y = 3, \quad x = -\frac{1}{3}$.

48. $x = 3, \quad x = -3$.

49. $3x + y = 4, \quad x - 3y + 1 = 0$.

50. $x - 1 = 0, \quad y = 0$.

En los problemas del 51 al 60 determine una ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas. Si es posible, dé la respuesta en la forma pendiente-ordenada al origen.

51. Pasa por $(-3, 2)$ y es paralela a $y = 4x - 5$.

52. Pasa por $(2, -8)$ y es paralela a $x = -4$.

53. Pasa por $(2, 1)$ y es paralela a $y = 2$.

54. Pasa por $(3, -4)$ y es paralela a $y = 3 + 2x$.

55. Es perpendicular a $y = 3x - 5$ y pasa por $(3, 4)$.

56. Es perpendicular a $y = -4$ y pasa por $(1, 1)$.

57. Pasa por $(7, 4)$ y es perpendicular a $y = -4$.

58. Pasa por $(-5, 4)$ y es perpendicular a la recta $2y = -x + 1$.

59. Pasa por $(-7, -5)$ y es paralela a la recta $2x + 3y + 6 = 0$.

60. Pasa por $(-4, 10)$ y es paralela al eje y.

61. Una recta pasa por $(1, 2)$ y por $(-3, 8)$. Determine el punto en la recta que tiene una abscisa (coordenada x) igual a 5.

62. Una línea recta tiene pendiente 2 e interseca al eje y en $(0, 1)$. ¿El punto $(-1, -1)$ pertenece a la recta?

63. **Acciones** En 1988, las acciones de una compañía de biotecnología se cotizaron en \$30 por acción. En 1998, la compañía empezó a tener problemas y el precio de las acciones cayó a \$10 por acción. Dibuje una recta que muestre la relación entre el precio por acción y el año en que se comerció, con años en el eje x y el precio en el eje y. Encuentre una interpretación para la pendiente.

64. **Velocidad del sonido** Una gráfica de la velocidad del sonido, S (en metros por segundo), al nivel del mar, contra la temperatura T del aire (en grados Celsius), tiene una pendiente de 0.61. La ecuación que describe la relación entre la velocidad del sonido y la temperatura del aire es $S = 0.61T + b$. Cuando la temperatura es 15°C, un investigador mide la velocidad del sonido como 340.55 metros por segundo. Determine b para completar la ecuación.

En los problemas 65 *y* 66 *determine una ecuación de la recta que describe la información siguiente*.

65. **Cuadrangulares** En una temporada, un jugador de las ligas mayores de béisbol dio 14 cuadrangulares al final del tercer mes y 20 cuadrangulares al final del quinto mes.

66. **Negocios** La propietaria de una tienda de embutidos inicia su negocio con una deuda de \$100,000. Después de operarla durante cinco años, ella acumula una utilidad de \$40,000.

67. **Fecha de parto** La longitud, L, de un feto humano de más de 12 semanas puede estimarse por medio de la fórmula $L = 1.53t - 6.7$, en donde L está en centímetros y t está en semanas desde la concepción. Un tocólogo utiliza la longitud del feto, medido por medio de ultrasonido, para determinar la edad aproximada del feto y establecer una fecha de parto para la madre. La fórmula debe reescribirse para tener como resultado una edad, t, dada la longitud fetal L. Determine la pendiente y la intersección con el eje L de la ecuación.

68. **Lanzamiento de disco** Un modelo matemático puede aproximar la distancia con que se ganó en el lanzamiento de disco en los Juegos Olímpicos mediante la fórmula $d = 184 + t$, en donde d está en pies y $t = 0$ corresponde al año 1984. Determine una forma lineal general de esta ecuación.

69. Mapa del campus Un mapa coordenado de un campus universitario da las coordenadas (x, y) de tres edificios principales como sigue: centro de cómputo, $(3.5, -1)$; laboratorio de ingeniería, $(0.5, 0)$; biblioteca $(-1, -4.5)$. Determine las ecuaciones (en la forma pendiente-ordenada al origen) de las trayectorias en línea recta que conectan (a) el laboratorio de ingeniería con el centro de cómputo, y (b) el laboratorio de ingeniería con la biblioteca. Demuestre que estas dos trayectorias son perpendiculares.

70. Geometría Muestre que los puntos $A(0, 0)$, $B(0, 4)$, $C(2, 3)$ y $D(2, 7)$ son los vértices de un paralelogramo (los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos).

71. Ángulo de aproximación Un pequeño aeroplano está aterrizando en un aeropuerto con un ángulo de aproximación de 45 grados, o pendiente de -1. El aeroplano inicia su descenso cuando tiene una elevación de 3300 pies. Determine la ecuación que describe la relación entre la altitud de la aeronave y la distancia recorrida, suponiendo que el ángulo de aproximación inicia en la distancia cero. Haga una gráfica de su ecuación en una calculadora gráfica. Si el aeropuerto está a 4000 pies desde donde el aeroplano inicia su aterrizaje, ¿qué le dice la gráfica acerca de la aproximación?

72. Ecuación de costo El costo diario promedio, C, para una cuarto en un hospital de la ciudad se elevó \$59.82 por año durante los años 1990 a 2000. Si el costo promedio en 1996 fue \$1128.50, ¿cuál es una ecuación que describe el costo promedio durante esta década, como una función del número de años, T, desde 1990?

73. Ecuación de ingreso Un pequeño negocio pronostica que su ingreso crecerá de acuerdo con el método de la línea recta con una pendiente de \$50,000 por año. En su quinto año, el negocio tuvo ingresos por \$330,000. Determine una ecuación que describa la relación entre los ingresos, R, y el número de años, T, desde la apertura del negocio.

74. Grafique $y = 1.3x + 7$ y verifique que la intersección y sea 7.

75. Grafique las rectas cuyas ecuaciones son

$$y = 1.5x + 1,$$
$$y = 1.5x - 1,$$

y

$$y = 1.5x + 2.5.$$

¿Qué observa acerca de las orientaciones de estas líneas? ¿Por qué esperaría este resultado, a partir de las ecuaciones de las líneas?

76. Grafique la recta $y = 3.4x - 2.3$. Determine las coordenadas de cualesquiera dos puntos de la recta y utilícelos para estimar la pendiente. ¿Cuál es la pendiente real de la recta?

77. Utilizando una ventana estándar y el mismo rectángulo de visualización, haga la gráfica de las rectas con ecuaciones

$$0.1875x - 0.3y + 0.94 = 0$$

y

$$0.32x + 0.2y + 1.01 = 0$$

Ahora, cambie la ventana a una ventana cuadrada (por ejemplo, en la calculadora TI-83, utilice ZOOM, Zsquare). Observe que las rectas aparentan ser perpendiculares entre sí. Pruebe que esto es cierto.

OBJETIVO Desarrollar la noción de curvas de demanda y oferta, e introducir funciones lineales.

4.2 Aplicaciones y funciones lineales

Muchas situaciones de la economía pueden describirse utilizando rectas, como lo muestra el ejemplo 1.

Principios en práctica 1
Niveles de producción

Un fabricante de bienes deportivos asigna 1000 unidades de tiempo por día para fabricar esquís y botas para esquís. Si toma 8 unidades de tiempo fabricar un esquí y 14 unidades de tiempo producir una bota, determine una ecuación que describa todos los posibles niveles de producción de los dos productos.

EJEMPLO 1 Niveles de producción

Suponga que un fabricante utiliza 100 libras de material para hacer los productos A y B, que requieren de 4 y 2 libras de material por unidad, respectivamente. Si x y y denotan el número de unidades producidas de A y B, respectivamente, entonces todos los niveles de producción están dados por las combinaciones de x y y que satisfacen la ecuación

$$4x + 2y = 100, \qquad \text{donde } x, y \geq 0.$$

Por tanto, los niveles de producción de A y B están relacionados linealmente. Al resolver para y se obtiene

$$y = -2x + 50 \qquad \text{(forma pendiente-ordenada al origen),}$$

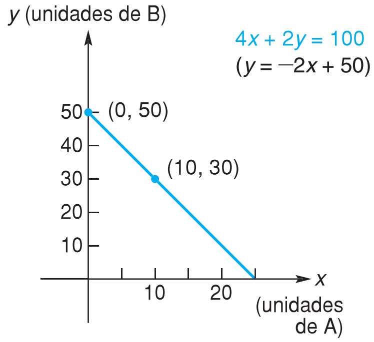


FIGURA 4.13 Niveles de producción relacionados linealmente.

de modo que la pendiente es -2. La pendiente refleja la tasa de cambio del nivel de producción de B con respecto al de A. Por ejemplo, si se produce una unidad adicional de A, se requerirán 4 libras más de material, de lo que resultan $\frac{4}{2} = 2$ unidades *menos* de B. Por tanto, cuando x aumenta en una unidad, el valor correspondiente de y disminuye en 2 unidades. Para hacer el bosquejo de la gráfica de $y = -2x + 50$, podemos utilizar la intersección con el eje y (0, 50), y el hecho de que cuando $x = 10$, $y = 30$ (véase la fig. 4.13).

Curvas de demanda y de oferta

Para cada nivel de precio de un producto existe una cantidad correspondiente de ese producto, que los consumidores demandarán (esto es, comprarán) durante algún periodo. Por lo general, a mayor precio la cantidad demandada es menor; cuando el precio baja la cantidad demandada aumenta. Si el precio por unidad del producto está dado por p, y la cantidad correspondiente (en unidades) está dada por q, entonces una ecuación que relaciona p y q se llama **ecuación de demanda.** Su gráfica es la **curva de demanda.** La figura 4.14(a) muestra una curva de demanda. De acuerdo con la práctica de la mayoría de los economistas, el eje horizontal es el eje q y el vertical es el eje p. Supondremos que el precio por unidad está dado en dólares y el periodo es una semana. Así, el punto (a, b) en la figura 4.14(a) indica que a un precio de b dólares por unidad, los consumidores demandarán a unidades por semana. Como los precios o cantidades negativas no tienen sentido, a y b deben ser no negativos. Para la mayoría de los productos, un incremento en la cantidad demandada corresponde a una disminución en el precio. Así que, por lo general, una curva de demanda desciende de izquierda a derecha, como en la figura 4.14(a).

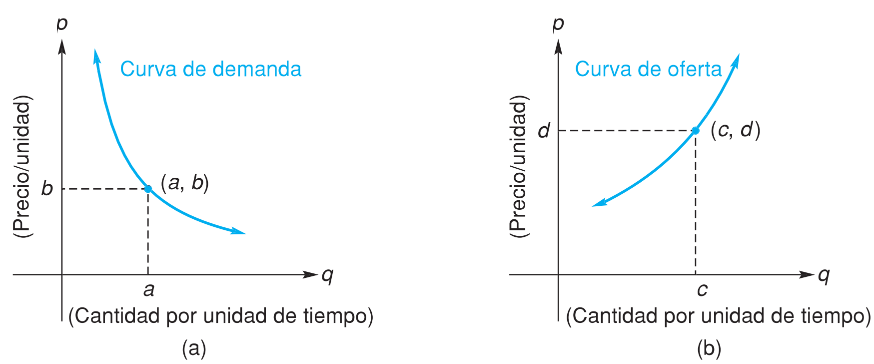


FIGURA 4.14 Curvas de demanda y de oferta.

Por lo general, una curva de demanda desciende de izquierda a derecha y una curva de oferta asciende de izquierda a derecha. Sin embargo, existen excepciones. Por ejemplo, la demanda de insulina podría representarse por medio de una recta vertical, ya que esta demanda permanece constante sin importar el precio.

Como respuesta a los diferentes precios, existe una cantidad correspondiente de productos que los *productores* están dispuestos a proveer al mercado durante algún periodo. Por lo general, a mayor precio por unidad es mayor la cantidad que los productores están dispuestos a proveer; cuando el precio disminuye también lo hace la cantidad suministrada. Si p denota el precio por unidad y q la cantidad correspondiente, entonces una ecuación que relaciona p y q se llama **ecuación de oferta,** y su gráfica es una **curva de oferta.** La figura 4.14(b) muestra una curva de oferta. Si p está en dólares y el periodo es una semana, entonces el punto (c, d) indica que a un precio de d dólares cada una, los productores proveerán c unidades por semana. Al igual que antes, c y d son no negativos. Una curva de oferta casi siempre asciende de izquierda a derecha, como en la figura 4.14(b). Esto indica que un fabricante suministrará más de un producto a precios mayores.

Ahora centraremos la atención en las curvas de oferta y de demanda que son líneas rectas (véase la fig. 4.15); se les denomina curvas de oferta *lineal* y de demanda *lineal*. Tales curvas tienen ecuaciones en las que p y q están relacionadas de manera lineal. Puesto que una curva de demanda por lo general desciende de izquierda a derecha, una curva de demanda lineal tiene pendiente negativa [véase la fig. 4.15(a)]. Sin embargo, la pendiente de una curva de oferta lineal es positiva, ya que la curva asciende de izquierda a derecha [véase la fig. 4.15(b)].

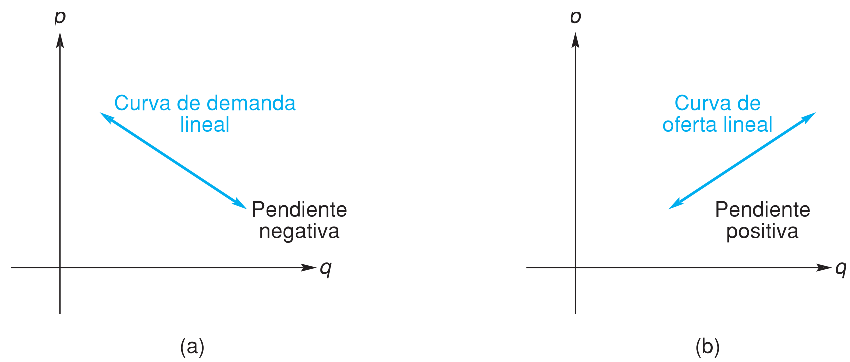


FIGURA 4.15 Curvas de demanda y oferta lineales.

Principios en práctica 2

Determinación de una ecuación de demanda

La demanda semanal de televisores de 26 pulgadas es 1200 unidades cuando el precio es de \$575 cada uno, y 800 unidades cuando el precio es de \$725 cada uno. Determine la ecuación de demanda para los televisores, suponiendo un comportamiento lineal.

EJEMPLO 2 Determinación de una ecuación de demanda

Suponga que la demanda por semana de un producto es de 100 *unidades, cuando el precio es de* \$58 *por unidad, y de* 200 *unidades a un precio de* \$51 *cada una. Determinar la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal.*

Solución:

Estrategia: ya que la ecuación de demanda es lineal, la curva de demanda debe ser una línea recta. Tenemos que la cantidad q y el precio p están relacionados linealmente de tal modo que $p = 58$ cuando $q = 100$ y $p = 51$ cuando $q = 200$. Por lo que los datos dados pueden representarse en un plano de coordenadas q, p [véase la fig. 4.15 (a)] por los puntos (100, 58) y (200, 51). Con estos puntos podemos encontrar una ecuación de la recta, esto es, la ecuación de demanda.

La pendiente de la recta que pasa por (100, 58) y (200, 51) es

$$m = \frac{51 - 58}{200 - 100} = -\frac{7}{100}.$$

Una ecuación de la recta (forma punto-pendiente) es

$$p - p_1 = m(q - q_1),$$

$$p - 58 = -\frac{7}{100}(q - 100).$$

Al simplificar, se obtiene la ecuación de demanda

$$p = -\frac{7}{100}q + 65. \quad \textbf{(1)}$$

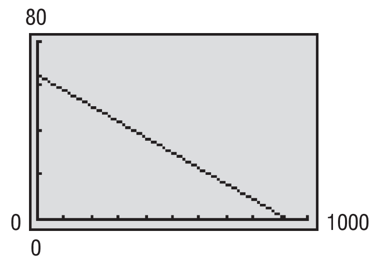


FIGURA 4.16 Gráfica de la función de demanda $p = -\frac{7}{100}q + 65$.

Por costumbre, una ecuación de demanda (así como una ecuación de oferta) expresa p en términos de q, lo que en realidad define una función de q. Por ejemplo, la ecuación (1) define p como una función de q y por ello se le llama la *función de demanda* para el producto (véase la fig. 4.16).

Funciones lineales

En la sección 3.2 se describió una *función lineal*. A continuación se presenta una definición formal.

Definición

Una función f es una ***función lineal*** si y sólo si $f(x)$ puede escribirse en la forma $f(x) = ax + b$, en donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

Suponga que $f(x) = ax + b$ es una función lineal y que $y = f(x)$. Entonces $y = ax + b$, la cual es la ecuación de una recta con pendiente a e intersección con el eje y b. Así, **la gráfica de una función lineal es una recta.** Decimos que la función $f(x) = ax + b$ tiene pendiente a.

Principios en práctica 3
Gráficas de funciones lineales

Una compañía que repara computadoras, cobra por un servicio una cantidad fija más una tarifa por hora. Si x es el número de horas necesarias para un servicio, el costo total se describe por medio de la función $f(x) = 40x + 60$. Haga una gráfica de la función determinando y graficando dos puntos.

EJEMPLO 3 Graficación de funciones lineales

a. *Graficar* $f(x) = 2x - 1$.

Solución: aquí f es una función lineal (con pendiente 2), de modo que su gráfica es una recta. Como dos puntos determinan una recta, sólo necesitamos graficar dos puntos y después dibujar una recta que pase por ellos [véase la fig. 4.17(a)]. Observe que uno de los puntos graficados es la intersección con el eje vertical, −1, que ocurre cuando $x = 0$.

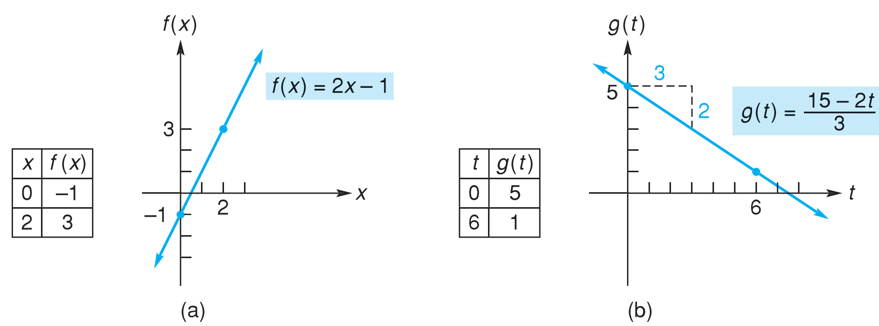


FIGURA 4.17 Gráficas de funciones lineales.

b. *Grafique* $g(t) = \dfrac{15 - 2t}{3}$.

Solución: observe que g es una función lineal porque podemos expresarla en la forma $g(t) = at + b$.

$$g(t) = \frac{15 - 2t}{3} = \frac{15}{3} - \frac{2t}{3} = -\frac{2}{3}t + 5.$$

La gráfica de g se muestra en la figura 4.17(b). Ya que la pendiente es $-\frac{2}{3}$, observe que cuando t aumenta en 3 unidades, $g(t)$ *disminuye* en 2.

Principios en práctica 4

Determinación de una función lineal

La altura de niños entre las edades de 6 a 10 años puede modelarse por medio de una función lineal de la edad t, en años. La altura de una niña cambia 2.3 pulgadas por año; ella mide 50.6 pulgadas de altura a la edad de 8 años. Determine una función que describa la altura de esta niña a la edad de t años.

EJEMPLO 4 Determinación de una función lineal

Suponer que f es una función lineal con pendiente 2 y $f(4) = 8$. *Hallar* $f(x)$.

Solución: ya que f es lineal, tiene la forma $f(x) = ax + b$. La pendiente es 2, de modo que $a = 2$ y tenemos

$$f(x) = 2x + b. \qquad (2)$$

Ahora determinamos b. Como $f(4) = 8$, en la ecuación (2) reemplazamos x por 4 y resolvemos para b.

$$\begin{aligned} f(4) &= 2(4) + b, \\ 8 &= 8 + b, \\ 0 &= b. \end{aligned}$$

De aquí que, $f(x) = 2x$.

Principios en práctica 5

Determinación de una función lineal

Un collar antiguo se espera que tenga un valor de \$360 después de 3 años y de \$640 al cabo de 7 años. Determine una función que describa el valor del collar después de x años.

EJEMPLO 5 Determinación de una función lineal

Si $y = f(x)$ es una función lineal tal que $f(-2) = 6$ y $f(1) = -3$, encontrar $f(x)$.

Solución:

Estrategia: los valores de la función corresponden a puntos sobre la gráfica de f. Con estos puntos podemos determinar una ecuación de la recta y, por tanto, de la función lineal.

La condición $f(-2) = 6$ significa que cuando $x = -2$, entonces $y = 6$. Por tanto, $(-2, 6)$ pertenece a la gráfica de f, que es una recta. De manera similar, $f(1) = -3$ implica que $(1, -3)$ también pertenece a la recta. Si hacemos $(x_1, y_1) = (-2, 6)$ y $(x_2, y_2) = (1, -3)$, la pendiente de la recta está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 6}{1 - (-2)} = \frac{-9}{3} = -3.$$

Podemos encontrar una ecuación de la recta por medio de la forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1), \\ y - 6 &= -3[x - (-2)], \\ y - 6 &= -3x - 6, \\ y &= -3x. \end{aligned}$$

Puesto que $y = f(x)$, $f(x) = -3x$. Por supuesto, se obtiene el mismo resultado si hacemos $(x_1, y_1) = (1, -3)$.

En muchos estudios los datos se reúnen y grafican en un sistema de coordenadas. Un análisis de los resultados puede indicar que hay una relación funcional entre las variables involucradas. Por ejemplo, los datos pueden ser aproximados por puntos en una recta. Esto indicaría una relación funcional lineal, tal como en el ejemplo 6 que sigue.

EJEMPLO 6 Dieta para gallinas

En pruebas hechas en una dieta experimental para gallinas, se determinó que el peso promedio w (en gramos) de una gallina fue, según las estadísticas, una función lineal del número de días d después de que se inició la dieta, donde $0 \leq d \leq 50$. Suponer que el peso promedio de una gallina al inicio la dieta fue de 40 gramos, y 25 días después fue de 675 gramos.

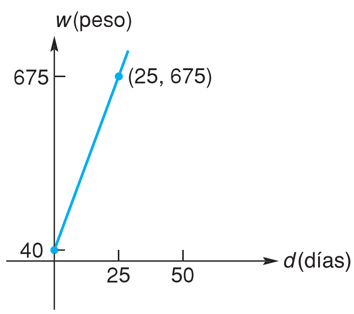


FIGURA 4.18 Función lineal que describe la dieta para gallinas.

a. *Determinar w como una función lineal de d.*

Solución: como w es una función lineal de d, su gráfica es una línea recta. Cuando $d = 0$ (al inicio de la dieta), $w = 40$. Por tanto, $(0, 40)$ pertenece a la gráfica (véase la fig. 4.18). De manera similar, $(25, 675)$ pertenece a la gráfica. Si hacemos $(d_1, w_1) = (0, 40)$ y $(d_2, w_2) = (25, 675)$, la pendiente de la recta es

$$m = \frac{w_2 - w_1}{d_2 - d_1} = \frac{675 - 40}{25 - 0} = \frac{635}{25} = \frac{127}{5}.$$

Utilizando la forma punto-pendiente, tenemos

$$w - w_1 = m(d - d_1),$$

$$w - 40 = \frac{127}{5}(d - 0),$$

$$w - 40 = \frac{127}{5}d,$$

$$w = \frac{127}{5}d + 40,$$

que expresa w como una función lineal de d.

b. *Determinar el peso promedio de una gallina cuando $d = 10$.*

Solución: cuando $d = 10$, tenemos $w = \frac{127}{5}(10) + 40 = 254 + 40 = 294$. Así, el peso promedio de una gallina 10 días después del inicio de la dieta es de 294 gramos.

Ejercicio 4.2

En los problemas del 1 al 6 determine la pendiente y la intersección con el eje vertical de la función lineal; haga un bosquejo de la gráfica.

1. $y = f(x) = -4x$.

2. $y = f(x) = x + 1$.

3. $g(t) = 2t - 4$.

4. $g(t) = 2(4 - t)$.

5. $h(q) = \dfrac{2 - q}{7}$.

6. $h(q) = 0.5q + 0.25$.

En los problemas del 7 al 14 determine $f(x)$, si f es una función lineal que tiene las propiedades dadas.

7. Pendiente $= 4$, $f(2) = 8$.

8. $f(0) = 3$, $f(4) = -5$.

9. $f(1) = 2$, $f(-2) = 8$.

10. Pendiente $= -4$, $f(\frac{1}{3}) = -2$.

11. Pendiente $= -\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = 4$.

12. $f(1) = 1$, $f(2) = 2$.

13. $f(-2) = -1$, $f(-4) = -3$.

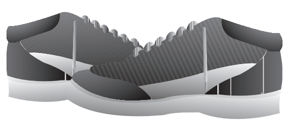
14. Pendiente $= 0.01$, $f(0.1) = 0.01$.

15. Ecuación de demanda Suponga que los clientes demandarán 40 unidades de un producto cuando el precio es de $12 por unidad, y 25 unidades cuando el precio es de $18 cada una. Halle la ecuación de la demanda, suponiendo que es lineal. Determine el precio por unidad cuando se requieren 30 unidades.

16. Ecuación de demanda La demanda semanal para un libro que se vende mucho es de 26,000 ejemplares cuando el precio es $16 cada uno, y de 10,000 libros cuando el precio es de $24 cada uno. Determine una ecuación de demanda para el libro, suponiendo que aquélla es lineal.

17. Ecuación de oferta Un fabricante de refrigeradores produce 3000 unidades cuando el precio es de $940 y 2200 unidades cuando el precio es $740. Suponga que el precio, p, y la cantidad, q, producidas están relacionadas de manera lineal. Determine la ecuación de oferta.

18. Ecuación de oferta Suponga que un fabricante de zapatos colocará en el mercado 50 mil pares cuando el precio es 35 (dólares por par) y 35 mil pares de zapatos cuando el precio es 30 dólares. Determine la ecuación de oferta, suponiendo que el precio p y la cantidad q están relacionadas de manera lineal.



19. Ecuación de costo Suponga que el costo para producir 10 unidades de un producto es $40 y el costo para 20 unidades es $70. Si el costo, c, está relacionado de manera lineal con la producción, q, determine el costo de producir 35 unidades.

20. Ecuación de costo Un anunciante va con un impresor y éste le cobra $79 por 100 copias de un volante y $88 por 400 copias de otro volante. Este impresor cobra un costo fijo, más una tarifa por cada copia de volantes de una sola página. Determine una función que describa el costo de un trabajo de impresión, si x es el número de copias que se hacen.

21. Tarifas de electricidad Una compañía de electricidad cobra a clientes residenciales 12.5 centavos por kilowatt-hora más un cargo base mensual. La factura mensual de un cliente viene con $51.65 por 380 kilowatt-hora. Determine una función lineal que describa el monto total por concepto de electricidad, si x es el número de kilowatt-hora utilizados en un mes.

22. Terapia por medio de radiación Un paciente con cáncer recibirá terapias mediante fármacos y radiación. Cada centímetro cúbico de la droga que será utilizada contiene 200 unidades curativas, y cada minuto de exposición a la radiación proporciona 300 unidades curativas. El paciente requiere 2400 unidades curativas. Si se administran d centímetros cúbicos y r minutos de radiación, determine una ecuación que relacione d y r. Haga la gráfica de la ecuación para $d \geq 0$ y $r \geq 0$; marque el eje horizontal como d.

23. Depreciación Suponga que el valor de una pieza de maquinaria disminuye cada año en 10% de su valor original. Si el valor original es $8000, determine una ecuación que exprese el valor v de la maquinaria t años después de su compra, en donde $0 \leq t \leq 10$. Haga un bosquejo de la ecuación, seleccione t como el eje horizontal y v como el eje vertical. ¿Cuál es la pendiente de la recta resultante? Este método de considerar el valor del equipo se denomina *depreciación lineal*.

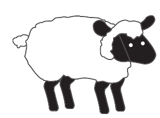
24. Depreciación Un televisor nuevo se deprecia $120 por año, y tiene un valor de $340 después de 4 años. Determine una función que describa el valor de este televisor, si x es la edad, en años, de la televisión.

25. Apreciación Un nuevo edificio de apartamentos se vendió por $960,000 cinco años después de que se compró. Los propietarios originales calcularon que el edificio se apreciaba $45,000 por año, mientras ellos fuesen los propietarios. Determine una función lineal que describa la apreciación del edificio, si x es el número de años desde la compra original.

26. Apreciación Una casa comprada en $198,000 se espera que duplique su valor en 18 años. Determine una ecuación lineal que describa el valor de la casa después de x años.

27. Precios por reparación Una compañía que repara copiadoras comerciales, cobra por un servicio una cantidad fija más una tarifa por hora. Si un cliente tiene una factura de $150 por un servicio de una hora y $280 por un servicio de tres horas, determine una función lineal que describa el precio de un servicio, en donde x es el número de horas del servicio.

28. Longitud de lana de ovejas Para regular su temperatura en relación con el calor ambiental, las ovejas aumentan su ritmo respiratorio, r (por minuto), cuando la longitud de la lana, l (en centímetros) disminuye.[2] Suponga que una oveja con una longitud de lana de 2 cm tiene un ritmo (promedio) respiratorio de 160, y aquéllas con una longitud de lana de 4 cm tienen un ritmo respiratorio de 125. Suponga que r y l están relacionadas linealmente. (a) Determine una ecuación que proporcione r en términos de l. (b) Determine el ritmo respiratorio de una oveja que tiene una longitud de lana de 1 cm.



29. Línea de isocostos En análisis de producción, una *línea de isocosto* es una línea cuyos puntos representan todas las combinaciones de dos factores de producción que pueden comprarse por la misma cantidad. Suponga que un granjero tiene asignados $20,000 para la compra de x toneladas de fertilizante (con un costo de $200 por tonelada) y y acres de tierra (con un costo de $2000 por acre). Determine una ecuación de la línea de isocosto que describa las distintas combinaciones que pueden comprarse con $20,000. Observe que ni x ni y pueden ser negativas.

[2]Adaptado de G. E. Folk, Jr., *Textbook of Environmental Physiology*. 2a. ed. (Philadelphia: Lea & Febiger, 1974.)

30. Línea de isoutilidad Un fabricante produce los productos X y Y para los cuales las ganancias por unidad son de \$4 y \$6, respectivamente. Si se venden x unidades de X y y unidades de Y, entonces la ganancia total P está dada por $P = 4x + 6y$, donde $x, y \geq 0$. (a) Haga el bosquejo de la gráfica de esta ecuación para $P = 240$. El resultado se conoce como *línea de isoutilidad*, y sus puntos representan todas las combinaciones de ventas que producen una utilidad de \$240. (b) Determine la pendiente para $P = 240$. (c) Si $P = 600$, determine la pendiente. (d) ¿Las rectas de isoutilidad para los productos X y Y son paralelas?

31. Escala de calificaciones Por razones de comparación, un profesor quiere cambiar la escala de las calificaciones de un conjunto de exámenes escritos, de modo que la calificación máxima siga siendo 100, pero la media (promedio) sea 80 en lugar de 56. (a) Determine una ecuación lineal que prediga esto. [*Sugerencia*: quiere que 56 se convierta en 80 y 100 permanezca como 100. Considere los puntos (56, 80) y (100, 100), y de manera más general, (x, y), donde x es la calificación anterior y y la nueva. Encuentre la pendiente y utilice la forma punto-pendiente. Exprese y en términos de x.] (b) Si en la nueva escala 60 es la calificación más baja para acreditar, ¿cuál fue la calificación más baja para acreditar en la escala original?

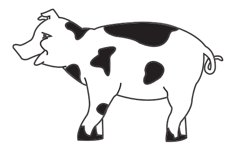
32. Psicología El resultado del experimento psicológico de Sternberg[3] sobre la recuperación de información, es que el tiempo de reacción, R, de una persona, en milisegundos, de acuerdo con las estadísticas es una función lineal del tamaño del conjunto de memoria N como sigue:

$$R = 38N + 397.$$

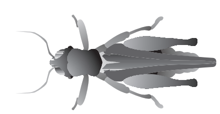
Haga el bosquejo de la gráfica para $1 \leq N \leq 5$. ¿Cuál es la pendiente?

33. Psicología En cierto experimento de aprendizaje que involucra repetición y memoria,[4] se estimó que la proporción p de elementos recordados se relacionaba linealmente con un tiempo de estudio efectivo t (en segundos), donde t está entre 5 y 9. Para un tiempo de estudio efectivo de 5 segundos, la proporción de elementos recordados fue de 0.32. Por cada segundo más en el tiempo de estudio, la proporción recordada aumentaba en 0.059. (a) Determine una ecuación que proporcione p en términos de t. (b) ¿Qué proporción de elementos se recordaron con 9 segundos de tiempo efectivo de estudio?

34. Dieta para cerdos En pruebas realizadas en una dieta experimental para cerdos, se determinó que el peso (promedio) w (en kilogramos) de un cerdo, estadísticamente era una función lineal del número de días, d, después de iniciada la dieta, donde $0 \leq d \leq 100$. Si el peso de un cerdo al inicio de la dieta fue de 20 kg, y a partir de ahí ganó 6.6 kg cada 10 días, determine w como una función de d; calcule el peso de un cerdo para 50 días después que inició la dieta.



35. Chirrido de grillos Los biólogos han encontrado que el número de chirridos por minuto hechos por los grillos de cierta especie están relacionados con la temperatura. La relación es casi lineal. A diferencia de los grillos que se mencionaron al inicio del capítulo 1, estos grillos chirrían todo el verano. A 68°F, los chirridos de los grillos son casi 124 por minuto. A 80°F son alrededor de 172 por minuto. (a) Determine una ecuación que dé la temperatura Fahrenheit, t, en términos del número de chirridos, c, por minuto. (b) Si usted cuenta los chirridos sólo durante 15 segundos, ¿cómo puede estimar rápidamente la temperatura?



36. Circuitos eléctricos En un circuito eléctrico el voltaje, V (en volts), y la corriente, i (en amperes), están relacionados linealmente. Cuando $i = 4$, $V = 2$; cuando $i = 12$, $V = 6$.

a. Determine V como una función de i.
b. Encuentre el voltaje cuando la corriente es de 10.

37. Física La presión, P, de un volumen constante de gas, en centímetros de mercurio, está relacionada linealmente con la temperatura, T, en grados Celsius. En un experimento con aire seco, se encontró que $P = 90$ cuando $T = 40$, y que $P = 100$ cuando $T = 80$. Exprese P como una función de T.

38. Teoría eléctrica Cuando una gráfica de la diferencia de potencial, V, en volts, de una celda de Daniell se grafica como una función de la corriente, i, en amperes, que se envía a un resistor externo, se obtiene una línea recta. La pendiente de esta recta es el negativo del valor de la resistencia interna de la celda. Para una celda particular con resistencia interna de 0.06 ohms, se encontró que $V = 0.6$ volts cuando $i = 0.12$ amperes. Exprese V como una función de i.

39. Hidráulica Una fórmula utilizada en hidráulica es

$$Q = 3.340b^3 + 1.8704b^2x,$$

donde b es una constante.

a. ¿La gráfica de esta ecuación es una línea recta?
b. De ser así, ¿cuál es la pendiente cuando $b = 1$?

---

[3] G. R. Loftus y E. E. Loftus, *Human Memory: The Processing of Information* (Nueva York: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., distribuido por Halsted Press, División de John Wiley & Sons, Inc., 1976).
[4] D. L. Hintzman, "Repetition and Learning", en *The Psychology of Learning*, vol. 10, ed. G. H. Brower (Nueva York: Academic Press, Inc., 1976, p. 77).

OBJETIVO Hacer el bosquejo de las parábolas que surgen de funciones cuadráticas.

4.3 Funciones cuadráticas

En la sección 3.2 se describió a una *función cuadrática* como una función polinomial de grado 2. A continuación se presenta una definición formal.

Definición

Una función f es una ***función cuadrática*** *si y sólo si* $f(x)$ puede escribirse en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, *donde* a, b *y* c son constantes *y* $a \neq 0$.

Por ejemplo, las funciones $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y $F(t) = -3t^2$ son cuadráticas. Sin embargo, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *no* es cuadrática, ya que no puede escribirse en la forma $g(x) = ax^2 + bx + c$.

La gráfica de la función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ *se* llama **parábola** y tiene una forma parecida a las curvas de la figura 4.19. Si $a > 0$, la gráfica se extiende hacia arriba de manera indefinida y decimos que la parábola *abre hacia arriba* [véase la fig. 4.19(a)]. Si $a < 0$, entonces la parábola *abre hacia abajo* [véase la fig. 4.19(b)].

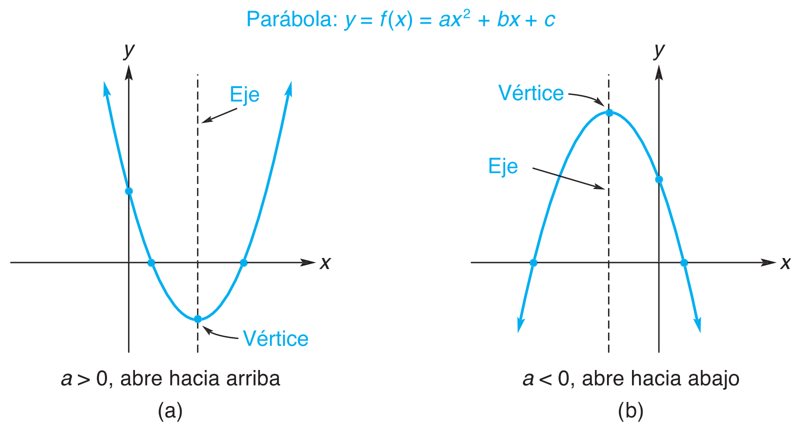


FIGURA 4.19 Parábolas.

Cada parábola en la figura 4.19 es *simétrica* con respecto a una recta vertical, llamada el **eje de simetría** de la parábola. Esto es, si la página fuera doblada en una de estas rectas, entonces las dos mitades de la parábola correspondiente coincidirían. El eje (de simetría) *no* es parte de la parábola, pero es una ayuda útil para hacer su bosquejo.

La figura 4.19 también muestra puntos marcados como **vértice,** donde el eje corta a la parábola. Si $a > 0$, el vértice es el punto “más bajo” de la parábola. Esto significa que $f(x)$ tiene un valor mínimo en ese punto. Si hacemos manipulaciones algebraicas sobre $ax^2 + bx + c$ (lo que se conoce como *completar el cuadrado*), podemos determinar no sólo este valor mínimo, sino también en dónde ocurre. Tenemos

$$f(x) = ax^2 + bx + c = (ax^2 + bx) + c.$$

Sumando y restando $\dfrac{b^2}{4a}$ se obtiene

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a},$$

de modo que

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Puesto que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ y $a > 0$, se sigue que $f(x)$ tiene un valor mínimo cuando $x + \frac{b}{2a} = 0$, esto es, cuando $x = -\frac{b}{2a}$. La coordenada y correspondiente a este valor de x es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. Así, el vértice está dado por

$$\text{vértice} = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

Éste también es el vértice de la parábola que abre hacia abajo ($a < 0$), pero en este caso $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ es el valor máximo de $f(x)$. [véase la fig. 4.19(b).]

El punto en donde la parábola $y = ax^2 + bx + c$ interseca al eje y (esto es, la intersección y) se da cuando $x = 0$. La coordenada y de este punto es c, de modo que la intersección con el eje y es $(0, c)$ o, simplemente, c. En resumen, tenemos lo siguiente.

Gráfica de una función cuadrática

La gráfica de la función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola.

1. Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba. Si $a < 0$, abre hacia abajo.
2. El vértice es $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
3. La intersección y es c.

Podemos hacer un rápido bosquejo de la gráfica de una función cuadrática localizando primero el vértice, la intersección y y unos cuantos puntos más, aquéllos en donde la parábola interseca al eje x. Las *intersecciones* x se encuentran al hacer $y = 0$ y resolver para x. Una vez que las intersecciones y el vértice se encuentran, es relativamente fácil trazar la parábola apropiada a través de estos puntos. En el caso de que las intersecciones con el eje x estén muy cercanas al vértice o que no existan intersecciones con el eje x, determinamos un punto en cada lado del vértice, de modo que podamos hacer un bosquejo razonable de la parábola. Tenga en cuenta que una recta vertical (con línea punteada) a través del vértice da el eje de simetría. Si graficamos puntos a un lado del eje, podemos obtener por simetría los correspondientes del otro lado.

Principios en práctica 1

Gráfica de una función cuadrática

La utilidad diaria de un concesionario de automóviles por la venta de un tipo de minivan está dada por $P(x) = -x^2 + 2x + 399$, en donde x es el número de minivans vendidas. Determine el vértice de la función y sus intersecciones con los ejes, y haga una gráfica de la función.

EJEMPLO 1 Graficación de una función cuadrática

Graficar la función cuadrática $y = f(x) = -x^2 - 4x + 12$.

Solución: aquí $a = -1$, $b = -4$ y $c = 12$. Como $a < 0$, la parábola abre hacia abajo y, por tanto, tiene un punto más alto. La coordenada x del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(-1)} = -2.$$

La coordenada y es $f(-2) = -(-2)^2 - 4(-2) + 12 = 16$. Así, el vértice es $(-2, 16)$, de modo que el valor máximo de $f(x)$ es 16. Ya que $c = 12$, la intersección y es 12. Para encontrar las intersecciones x, hacemos y igual a 0 en $y = -x^2 - 4x + 12$ y resolvemos para x:

$$0 = -x^2 - 4x + 12,$$
$$0 = -(x^2 + 4x - 12),$$
$$0 = -(x + 6)(x - 2).$$

Así $x = -6$ o $x = 2$, de modo que las intersecciones x son -6 y 2. Ahora trazamos el vértice, el eje de simetría y las intersecciones [véase la fig. 4.20(a)]. Como $(0, 12)$ está a *dos* unidades a la *derecha* del eje, existe un punto correspondiente *dos* unidades a la *izquierda* del eje con la misma coordenada y. Por tanto, obtenemos el punto $(-4, 12)$. Al unir todos los puntos, trazamos una parábola que abre hacia abajo [véase la fig. 4.20(b)].

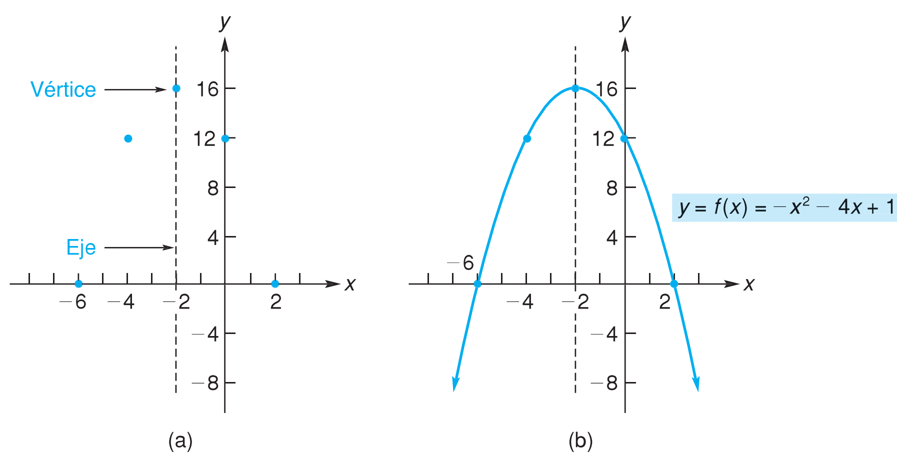


FIGURA 4.20 Gráfica de la parábola $y = f(x) = -x^2 - 4x + 12$.

EJEMPLO 2 Graficación de una función cuadrática

Graficar $p = 2q^2$.

Solución: aquí p es una función cuadrática de q, donde $a = 2$, $b = 0$ y $c = 0$. Como $a > 0$, la parábola abre hacia arriba y, por tanto, tiene un punto más bajo. La coordenada q del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(2)} = 0,$$

y la coordenada p es $2(0)^2 = 0$. En consecuencia, el valor *mínimo* de p es 0 y el vértice es $(0, 0)$. En este caso, el eje p es el eje de simetría. Una parábola que

q	p
2	8
−2	8

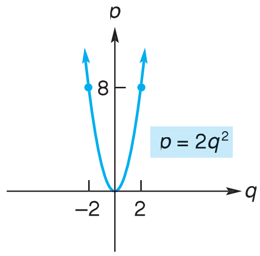


FIGURA 4.21 Gráfica de la parábola $p = 2q^2$.

abre hacia arriba con vértice en (0, 0) no puede tener ninguna otra intersección. De aquí que para hacer un buen bosquejo de esta parábola, graficamos un punto a cada lado del vértice. Si $q = 2$, entonces $p = 8$. Esto da el punto (2, 8), y por simetría el punto (−2, 8) (véase la fig.4.21).

El ejemplo 3 ilustra que la determinación de las intersecciones puede requerir el uso de la fórmula cuadrática.

EJEMPLO 3 Graficación de una función cuadrática

Graficar $g(x) = x^2 - 6x + 7$.

Solución: aquí g es una función cuadrática, donde $a = 1$, $b = -6$ y $c = 7$. La parábola abre hacia arriba, ya que $a > 0$. La coordenada x del vértice (el punto más bajo) es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(1)} = 3,$$

y $g(3) = 3^2 - 6(3) + 7 = -2$, que es el valor mínimo de $g(x)$. Por tanto, el vértice es $(3, -2)$. Ya que $c = 7$, la intersección con el eje vertical es 7. Para encontrar las intersecciones x, hacemos $g(x) = 0$.

$$0 = x^2 - 6x + 7.$$

El lado derecho no se puede factorizar con facilidad, de modo que usaremos la fórmula cuadrática para hallar los valores de x:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(7)}}{2(1)}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{6}{2} \pm \frac{2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}.$$

Por tanto, las intersecciones x son $3 + \sqrt{2}$ y $3 - \sqrt{2}$. Después de graficar el vértice, las intersecciones y (por simetría) el punto (6, 7), dibujamos la parábola que se abre hacia arriba como se muestra en la figura 4.22.

Principios en práctica 2
Gráfica de una función cuadrática

Un hombre que está parado en el montículo del lanzador lanza una bola recta con una velocidad inicial de 32 pies por segundo. La altura de la bola, en pies, t segundos después de que fue lanzada se describe por medio de la función $h(t) = -16t^2 + 32t + 8$, para $t \geq 0$. Determine el vértice y las intersecciones con los ejes de la función, y haga una gráfica de la función.

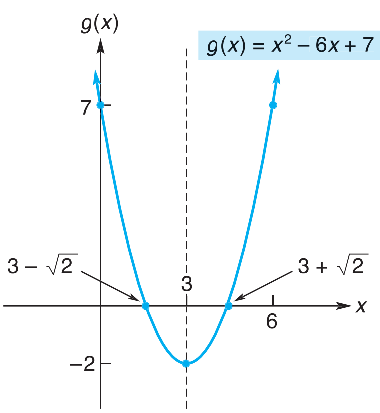


FIGURA 4.22 Gráfica de la parábola $g(x) = x^2 - 6x + 7$.

EJEMPLO 4 Graficación de una función cuadrática

Graficar $y = f(x) = 2x^2 + 2x + 3$ *y determinar el rango de f.*

Solución: esta función es cuadrática con $a = 2$, $b = 2$ y $c = 3$. Como $a > 0$ la gráfica es una parábola que se abre hacia arriba. La coordenada x del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(2)} = -\frac{1}{2}$$

y la coordenada y es $2(-\frac{1}{2})^2 + 2(-\frac{1}{2}) + 3 = \frac{5}{2}$. Así, el vértice es $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$. Como $c = 3$, la intersección y es 3. Una parábola que abre hacia arriba con su vértice arriba del eje x no tiene intersecciones x. En la figura 4.23 graficamos

x	y
-2	7
1	7

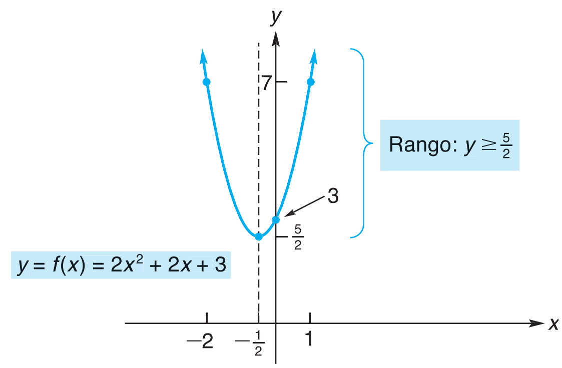


FIGURA 4.23 Gráfica de $y = f(x) = 2x^2 + 2x + 3$.

la intersección y, el vértice y un punto adicional $(-2, 7)$ a la izquierda del vértice. Por simetría, también obtenemos el punto $(1, 7)$. Trazando una parábola a través de estos puntos se obtiene la gráfica deseada. Con base en la figura, vemos que el rango de f es toda $y \geq \frac{5}{2}$, esto es, el intervalo $[\frac{5}{2}, \infty)$.

EJEMPLO 5 Ingreso máximo

La función de demanda para un producto es $p = 1000 - 2q$, donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando q unidades son demandadas (por semana) por los consumidores. Encontrar el nivel de producción que maximice el ingreso total del productor, y determinar ese ingreso.

Solución:

La fórmula para el ingreso total debe sumarse a su repertorio de relaciones para negocios y economía.

Estrategia: para maximizar el ingreso, debemos determinar la función de ingreso, $r = f(q)$. Utilizando la relación

$$\textbf{ingreso total} = (\textbf{precio})(\textbf{cantidad}),$$

tenemos

$$r = pq.$$

Por medio de la ecuación de demanda, podemos expresar p en términos de q, de modo que r sea estrictamente una función de q.

Tenemos

$$\begin{aligned} r &= pq \\ &= (1000 - 2q)q. \\ r &= 1000q - 2q^2. \end{aligned}$$

Observe que r es una función cuadrática de q, con $a = -2$, $b = 1000$ y $c = 0$. Ya que $a < 0$ (la parábola abre hacia abajo), r es máximo en el vértice (q, r), donde

Principios en práctica 3

Ingreso máximo

La función de demanda para la línea de libros de cocina de un editor es $p = 6 - 0.003q$, en donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan q unidades (por día). Determine el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

$$q = -\frac{b}{2a} = -\frac{1000}{2(-2)} = 250.$$

El valor máximo de r está dado por

$$\begin{aligned} r &= 1000(250) - 2(250)^2 \\ &= 250{,}000 - 125{,}000 = 125{,}000. \end{aligned}$$

Así, el ingreso máximo que el fabricante puede recibir es de \$125,000, que ocurre en un nivel de producción de 250 unidades. La figura 4.24(a) muestra la gráfica de la función de ingreso. Sólo la parte para la que $q \geq 0$ y $r \geq 0$ se dibuja, ya que la cantidad y el ingreso no pueden ser negativos.

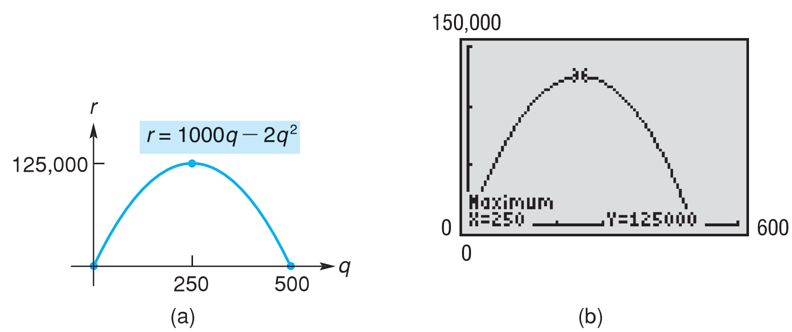


FIGURA 4.24 Gráfica de la función de ingreso.

Tecnología

El valor máximo (o mínimo) de una función puede encontrarse con una calculadora gráfica, utilizando las características de trazado y acercamiento, o bien con la operación de "máximo" (o "mínimo"). La figura 4.24(b) muestra la pantalla para la función de ingreso del ejemplo 5, esto es, la gráfica de $y = 1000x - 2x^2$. Observe que remplazamos r por y y q por x.

Ejercicio 4.3

En los problemas del 1 al 8 establezca si la función es cuadrática o no.

1. $f(x) = 5x^2$.

2. $g(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 4}$.

3. $g(x) = 7 - 6x$.

4. $h(s) = 2s^2(s^2 + 1)$.

5. $h(q) = (q + 4)^2$.

6. $f(t) = 2t(3 - t) + 4t$.

7. $f(s) = \dfrac{s^2 - 9}{2}$.

8. $g(t) = (t^2 - 1)^2$.

En los problemas del 9 al 12 no haga una gráfica.

9. (a) Para la parábola $y = f(x) = -4x^2 + 8x + 7$, encuentre el vértice. (b) ¿El vértice corresponde al punto más bajo o al más alto de la gráfica?

10. Repita el problema 9, si $y = f(x) = 8x^2 + 4x - 1$.

11. Para la parábola $y = f(x) = x^2 + 2x - 8$, encuentre (a) la intersección y, (b) las intersecciones x, y (c) el vértice.

12. Repita el problema 11, si $y = f(x) = 3 + x - 2x^2$.

En los problemas del 13 al 22 grafique cada función. Obtenga el vértice y las intersecciones, y determine el rango.

13. $y = f(x) = x^2 - 6x + 5.$

14. $y = f(x) = -4x^2.$

15. $y = g(x) = -2x^2 - 6x.$

16. $y = f(x) = x^2 - 1.$

17. $s = h(t) = t^2 + 2t + 1.$

18. $s = h(t) = 2t^2 + 3t - 2.$

19. $y = f(x) = -9 + 8x - 2x^2.$

20. $y = H(x) = 1 - x - x^2.$

21. $t = f(s) = s^2 - 8s + 14.$

22. $t = f(s) = s^2 + 6s + 11.$

En los problemas del 23 al 26 establezca si $f(x)$ tiene un valor máximo o mínimo y encuentre ese valor.

23. $f(x) = 100x^2 - 20x + 25.$

24. $f(x) = -2x^2 - 16x + 3.$

25. $f(x) = 4x - 50 - 0.1x^2.$

26. $f(x) = x(x + 3) - 12.$

27. Ingreso La función de demanda para el fabricante de un producto es $p = f(q) = 1200 - 3q$, donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando se demandan q unidades (por semana). Encuentre el nivel de producción que maximiza el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

28. Ingreso La función de demanda para una línea de reglas de plástico de una compañía de artículos de oficina es $p = 0.9 - 0.0004q$, en donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan q unidades (diarias). Determine el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

29. Ingreso La función de demanda para la línea de laptops de una compañía de electrónica es $p = 2400 - 6q$, en donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan q unidades (semanales). Determine el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

30. Mercadeo Una compañía de investigación de mercados estima que n meses después de la introducción de un nuevo producto, $f(n)$ miles de familias lo usarán, en donde

$$f(n) = \tfrac{10}{9}n(12 - n), \qquad 0 \leq n \leq 12.$$

Estime el número máximo de familias que usarán el producto.

31. Utilidad La utilidad diaria de la venta de árboles para el departamento de jardinería de un almacén está dada por $P(x) = -x^2 + 18x + 144$, en donde x es el número de árboles vendidos. Determine el vértice y las intersecciones con los ejes de la función, y haga la gráfica de la función.

32. Psicología Una predicción hecha por la psicología, relaciona la magnitud de un estímulo, x, con la magnitud de la respuesta, y, lo cual se expresa por la ecuación $y = kx^2$, en donde k es una constante del experimento. En un experimento sobre reconocimiento de patrones, $k = 2$. Determine el vértice de la función y haga la gráfica de su ecuación (suponga que no hay restricción sobre x).

33. Biología Unos biólogos estudiaron los efectos nutricionales sobre ratas que fueron alimentadas con una dieta que contenía un 10% de proteína.[5] La proteína consistía en levadura y harina de maíz. Al variar el porcentaje P de levadura en la mezcla de proteína, el grupo de biólogos estimaron que el peso promedio ganado (en gramos) por una rata en un periodo fue

$$f(P) = -\tfrac{1}{50}P^2 + 2P + 20, \quad 0 \leq P \leq 100.$$

Encuentre el peso máximo ganado.

34. Altura de una pelota Suponga que la altura, s, de una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde el piso está dada por

$$s = -4.9t^2 + 58.8t,$$

donde s está en metros y t es el tiempo transcurrido en segundos (véase la fig. 4.25). ¿Al cabo de cuántos segundos la pelota alcanza su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?

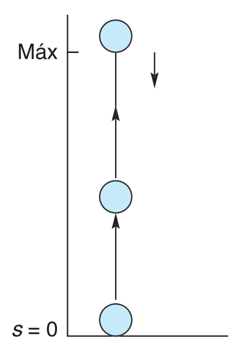


FIGURA 4.25 Pelota lanzada verticalmente hacia arriba (problema 34).

[5]Adaptado de R. Bressani, "The Use of Yeast in Human Foods", en *Single-Cell Protein*, ed. R. I. Mateles y S. R. Tannenbaum (Cambridge, MA: MIT Press, 1968).

35. **Arquería** Un muchacho que está parado en una colina, dispara una flecha directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 80 pies por segundo. La altura, h, de la flecha en pies, t segundos después de que se soltó, se describe por la función $h(t) = -16t^2 + 80t + 32$. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la flecha? ¿Cuántos segundos después de que se suelta, alcanza esta altura?

36. **Lanzamiento de muñeca** Una niña de 6 años de edad que está parada sobre una caja de juguetes lanza una muñeca directamente hacia arriba, con una velocidad inicial de 16 pies por segundo. La altura h de la muñeca en pies, t segundos después de que se soltó se describe por medio de la función $h(t) = -16t^2 + 16t + 4$. ¿Cuánto tiempo le toma a la muñeca alcanzar su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?

37. **Lanzamiento de un cohete** Un cohete de juguete se lanza verticalmente hacia arriba desde el techo de una cochera con una velocidad inicial de 80 pies por segundo. La altura, h, del cohete en pies, t segundos después que fue lanzado, se describe por medio de la función $h(t) = -16t^2 + 80t + 16$. Determine el vértice y las intersecciones con los ejes de la gráfica, y haga la gráfica de la función.

38. **Cable en suspensión** La forma del cable principal de un puente colgante puede describirse por medio de la función

$$y = f(x) = \frac{1}{500}x^2 + \frac{1}{250}x + 10, \quad -100 \le x \le 100,$$

en donde $f(x)$ es la altura del cable (en pies) por arriba del terraplén, y x es la distancia horizontal (en pies) medida desde el centro del puente. Haga la gráfica de la función y determine su rango.

39. **Física** El desplazamiento de un objeto desde un punto de referencia en el tiempo t está dado por

$$s = 3.2t^2 - 16t + 28.7,$$

donde s está en metros y t en segundos.

a. ¿Para qué valor de t ocurre el desplazamiento mínimo?
b. ¿Cuál es el desplazamiento mínimo del objeto, medido a partir del punto de referencia?

40. **Fuerza** Durante una colisión, la fuerza, F (en newtons), que actúa sobre un objeto varía con el tiempo t, de acuerdo con la ecuación $F = 87t - 21t^2$, donde t está en segundos.

a. ¿Para qué valor de t es máxima la fuerza?
b. ¿Cuál es el valor máximo de la fuerza?

41. **Viga con carga** Cuando una viga horizontal de longitud l es cargada uniformemente, la ecuación del momento es

$$M = \frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2},$$

donde w está relacionada con la carga, y x es la medida desde el extremo izquierdo de la viga.

a. ¿Para qué valor de x es M un máximo? (Suponga $w > 0$.)
b. ¿Cuál es el valor máximo de M?
c. ¿Para qué valores de x se tiene $M = 0$?

42. **Área** Exprese el área del rectángulo mostrado en la figura 4.26 como una función cuadrática de x. ¿Para qué valor de x el área será máxima?

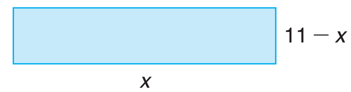


FIGURA 4.26 Diagrama para el problema 42.

43. **Terreno cercado** Un constructor de edificios quiere cercar un terreno rectangular adyacente a un río recto, utilizando la orilla del río como un lado del área encerrada (véase la fig. 4.27). Si el constructor tiene 200 pies de cerca, encuentre las dimensiones del área máxima que se puede encerrar.

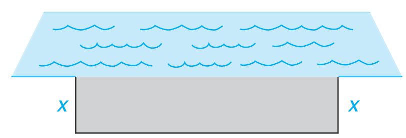


FIGURA 4.27 Diagrama para el problema 43.

44. Encuentre dos números cuya suma es 40 y su producto es un máximo.

45. A partir de la gráfica de $y = 1.4x^2 - 3.1x + 4.6$, determine las coordenadas del vértice. Redondee los valores a dos decimales. Verifique su respuesta utilizando la fórmula para el vértice.

46. Encuentre los ceros de $f(x) = -\sqrt{2}x^2 + 3x + 8.5$ por inspección de su gráfica. Redondee los valores a dos decimales.

47. Determine el número de ceros reales de cada una de las siguientes funciones cuadráticas:

a. $f(x) = 4.2x^2 - 8.1x + 10.4$.
b. $f(x) = 5x^2 - 2\sqrt{35}x + 7$.
c. $f(x) = \dfrac{5.1 - 7.2x - x^2}{4.8}$.

48. Encuentre el valor máximo (redondeado a dos decimales) de la función $f(x) = 5.4 + 12x - 4.1x^2$ a partir de su gráfica.

49. Encuentre el valor mínimo (redondeado a dos decimales) de la función $f(x) = 20x^2 - 13x + 7$ a partir de su gráfica.

OBJETIVO Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres variables por medio de la técnica de eliminación por adición o por sustitución (en el capítulo 6 se mostrarán otros métodos).

4.4 Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas con dos variables

Cuando una situación debe describirse matemáticamente, no es raro que surja un *conjunto* de ecuaciones. Por ejemplo, suponga que el administrador de una fábrica establece un plan de producción para dos modelos de un producto nuevo. El modelo A requiere de 4 piezas del tipo I y 9 piezas del tipo II. El modelo B requiere de 5 piezas del tipo I y 14 piezas del tipo II. De sus proveedores, la fábrica obtiene 335 piezas del tipo I y 850 piezas del tipo II cada día. ¿Cuántos productos de cada modelo debe producir cada día, de modo que todas las piezas del tipo I y piezas del tipo II sean utilizadas?

Es buena idea construir una tabla que resuma la información importante. La tabla 4.2 muestra el número de piezas del tipo I y piezas del tipo II requeridas para cada modelo, así como el número total disponible.

TABLA 4.2

	Modelo A	Modelo B	Total disponible
Piezas tipo I	4	5	335
Piezas tipo II	9	14	850

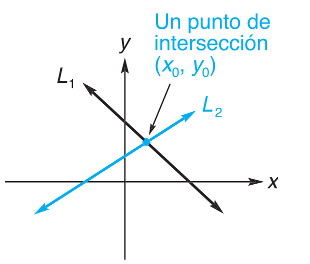


FIGURA 4.28 Sistema lineal (una solución).

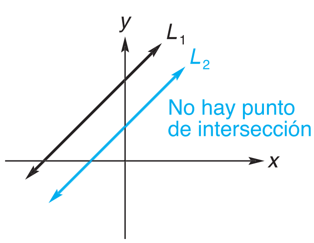


FIGURA 4.29 Sistema lineal (no hay solución).

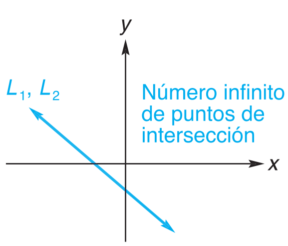


FIGURA 4.30 Sistema lineal (un número infinito de soluciones).

Suponga que hacemos x igual al número de artículos del modelo A fabricados cada día, y y igual al número de artículos del modelo B. Entonces éstos requieren de $4x + 5y$ piezas del tipo I y $9x + 14y$ piezas del tipo II. Como están disponibles 335 y 850 piezas del tipo I y II, respectivamente, tenemos

$$\begin{cases} 4x + 5y = 335, & \textbf{(1)} \\ 9x + 14y = 850. & \textbf{(2)} \end{cases}$$

A este conjunto de ecuaciones le llamamos **sistema** de dos ecuaciones lineales en las variables (o incógnitas) x y y. El problema es encontrar valores de x y y para los cuales *ambas* ecuaciones sean verdaderas de manera *simultánea*. Estos valores se llaman *soluciones* del sistema.

Como las ecuaciones (1) y (2) son lineales, sus gráficas son líneas rectas; llamémoslas L_1 y L_2. Ahora, las coordenadas de cualquier punto sobre una línea satisfacen la ecuación de esa línea; esto es, hacen a la ecuación verdadera. Por tanto, las coordenadas de cualquier punto de intersección de L_1 y L_2 satisfacen ambas ecuaciones. Esto significa que un punto de intersección da una solución del sistema.

Si L_1 y L_2 se dibujan en el mismo plano, existen tres posibles situaciones:

1. L_1 y L_2 pueden intersecarse en exactamente un punto, digamos (x_0, y_0). (Véase la fig. 4.28). Por tanto, el sistema tiene la solución $x = x_0$ y $y = y_0$.
2. L_1 y L_2 pueden ser paralelas y no tener puntos en común (véase la fig. 4.29). En este caso no existe solución.
3. L_1 y L_2 pueden ser la misma recta (véase la fig. 4.30). Por tanto, las coordenadas de cualquier punto sobre la recta son una solución del sistema. En consecuencia, existe un número infinito de soluciones.

Nuestro objetivo principal aquí es estudiar los métodos algebraicos para resolver un sistema de ecuaciones lineales. En esencia, remplazamos de manera sucesiva un sistema por otro que tenga la misma solución (esto es, remplazamos el sistema original por *sistemas equivalentes*), *pero cuyas ecuaciones tengan una forma progresivamente más adecuada para determinar la solución*. *En términos más precisos*, *buscamos un sistema equivalente que contenga una ecuación en la que una de las variables no aparezca* (*esto es*, *eliminar una de las variables*). Ilustraremos este procedimiento para el sistema propuesto originalmente:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 335, & (3) \\ 9x + 14y = 850. & (4) \end{cases}$$

Para empezar, obtendremos un sistema equivalente en el que x no aparezca en una ecuación. Primero encontramos un sistema equivalente en el que los coeficientes de los términos en x en cada ecuación sean iguales excepto por el signo. Multiplicando la ecuación (3) por 9 [esto es, multiplicando ambos miembros de la ecuación (3) por 9] y multiplicando la ecuación (4) por -4 se obtiene

$$\begin{cases} 36x + 45y = 3015, & (5) \\ -36x - 56y = -3400. & (6) \end{cases}$$

Los miembros izquierdo y derecho de la ecuación (6) son iguales, de modo que cada miembro puede *sumarse* al correspondiente de la ecuación (5). Esto tiene como resultado

$$-11y = -385,$$

que sólo tiene una variable, como se planeó. Resolviéndola se obtiene

$$y = 35,$$

así obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = 35, & (7) \\ -36x - 56y = -3400. & (8) \end{cases}$$

Al remplazar y en la ecuación (8) por 35, obtenemos

$$\begin{aligned} -36x - 56(35) &= -3400, \\ -36x - 1960 &= -3400, \\ -36x &= -1440, \\ x &= 40. \end{aligned}$$

Por tanto, el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} y = 35, \\ x = 40. \end{cases}$$

Podemos verificar nuestra respuesta sustituyendo $x = 40$ y $y = 35$ en *ambas* ecuaciones originales. En la ecuación (3) obtenemos $4(40 + 5(35) = 335$, o $335 = 335$. En la ecuación (4) obtenemos $9(40) + 14(35) = 850$, o bien, $850 = 850$. Por tanto, la solución es

$$x = 40 \quad \text{y} \quad y = 35.$$

Cada día el administrador debe planear la fabricación de 40 productos del modelo A y 35 del modelo B. El procedimiento efectuado se conoce como **eliminación por adición.** Aunque elegimos eliminar primero x, pudimos haber hecho lo mismo para y, mediante un procedimiento similar.

Principios en práctica 1
Método de eliminación por adición

Un especialista en computadoras tiene invertidos $200,000 para su retiro, parte al 9% y parte al 8%. Si el ingreso anual total por las inversiones es de $17,200, ¿cuánto está invertido en cada tasa?

EJEMPLO 1 Método de eliminación por adición

Utilizar eliminación por adición para resolver el sistema.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13, \\ 3y + 2x = 3. \end{cases}$$

Solución: por conveniencia alineamos los términos en x y en y para obtener

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13, & (9) \\ 2x + 3y = 3. & (10) \end{cases}$$

Para eliminar y, multiplicamos la ecuación (9) por 3 y la ecuación (10) por 4:

$$\begin{cases} 9x - 12y = 39, & (11) \\ 8x + 12y = 12. & (12) \end{cases}$$

Sumando la ecuación (11) a la (12) se obtiene $17x = 51$, de la cual $x = 3$. Tenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} 9x - 12y = 39, & (13) \\ x = 3. & (14) \end{cases}$$

Al remplazar x por 3 en la ecuación (13) se obtiene

$$9(3) - 12y = 39,$$
$$-12y = 12,$$
$$y = -1,$$

de modo que el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} y = -1, \\ x = 3. \end{cases}$$

La solución es $x = 3$ y $y = -1$. La figura 4.31 muestra una gráfica del sistema.

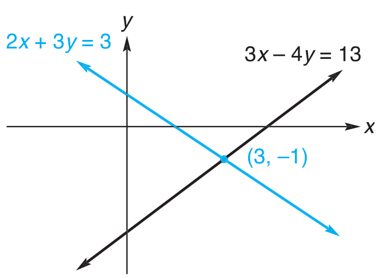


FIGURA 4.31 Sistema lineal del ejemplo 1; una solución.

El sistema del ejemplo 1,

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13, & (15) \\ 2x + 3y = 3, & (16) \end{cases}$$

puede resolverse de otra manera. Primero elegimos una de las ecuaciones, por ejemplo, la ecuación (15), y despejamos una de las incógnitas en términos de la otra, digamos x en términos de y. Así la ecuación (15) es equivalente a $3x = 4y + 13$, o

$$x = \frac{4}{3}y + \frac{13}{3},$$

y obtenemos

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3}y + \frac{13}{3}, & (17) \\ 2x + 3y = 3. & (18) \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x de la ecuación (17) en la ecuación (18) se obtiene

$$2\left(\frac{4}{3}y + \frac{13}{3}\right) + 3y = 3. \quad (19)$$

De este modo ya eliminamos x. Resolviendo la ecuación (19), tenemos

$$\frac{8}{3}y + \frac{26}{3} + 3y = 3,$$

$$8y + 26 + 9y = 9 \qquad \text{(eliminando fracciones)},$$

$$17y = -17,$$

$$y = -1.$$

Al remplazar y en la ecuación (17) por -1, se obtiene $x = 3$, y el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = -1, \end{cases}$$

como vimos antes, este método se llama **eliminación por sustitución.**

Principios en práctica 2

Método de eliminación por sustitución

A dos especies de ciervos, A y B, que viven en un refugio de vida salvaje se les da alimento extra en invierno. Cada semana reciben 2 toneladas de alimento en forma de croqueta y 4.75 toneladas de heno. Cada ciervo de la especie A requiere 4 libras de croquetas y 5 libras de heno. Cada ciervo de la especie B requiere 2 libras de las croquetas y 7 libras de heno. ¿Cuántos ciervos de cada especie se podrán sustentar con el alimento, de modo que todo el alimento se consuma cada semana?

EJEMPLO 2 Método de eliminación por sustitución

Utilizar eliminación por sustitución para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0, \\ 2x + 4y + 4 = 0. \end{cases}$$

Solución: es fácil resolver la primera ecuación para x. Esto da el sistema equivalente

$$\begin{cases} x = -2y + 8, & \textbf{(20)} \\ 2x + 4y + 4 = 0. & \textbf{(21)} \end{cases}$$

Al sustituir $-2y + 8$ por x en la ecuación (21) se obtiene

$$2(-2y + 8) + 4y + 4 = 0,$$

$$-4y + 16 + 4y + 4 = 0.$$

Esta última ecuación se simplifica a $20 = 0$. Por tanto, tenemos el sistema

$$\begin{cases} x = -2y + 8, & \textbf{(22)} \\ 20 = 0. & \textbf{(23)} \end{cases}$$

Ya que le ecuación (23) *nunca* es verdadera, **no existe solución** para el sistema original. La razón es clara si observamos que las ecuaciones originales pueden escribirse en la forma pendiente-ordenada al origen como

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

y

$$y = -\frac{1}{2}x - 1.$$

Estas ecuaciones representan líneas rectas que tienen pendientes de $-\frac{1}{2}$, pero diferentes intersecciones y, 4 y -1. Esto es, especifican rectas paralelas diferentes (véase la fig. 4.32).

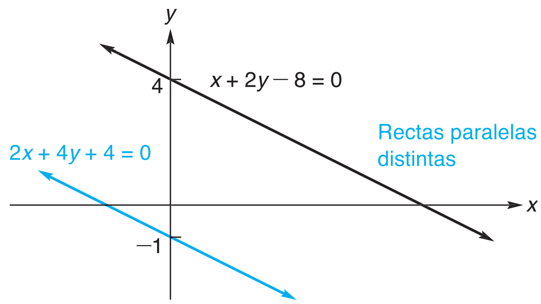


FIGURA 4.32 Sistema lineal del ejemplo 2; no hay solución.

Principios en práctica 3

Un sistema lineal con un número infinito de soluciones

Dos especies de peces, A y B, están criándose en una granja piscícola, en donde se les alimenta con dos suplementos vitamínicos. Todos los días reciben 100 gramos del primer suplemento y 200 gramos del segundo suplemento. Cada pez de la especie A requiere 15 mg del primer suplemento y 30 mg del segundo suplemento. Cada pez de la especie B requiere 20 mg del primer suplemento y 40 mg del segundo suplemento. ¿Cuántos peces de cada especie puede sustentar la granja de modo que todos los suplementos se consuman cada día?

EJEMPLO 3 Un sistema lineal con un número infinito de soluciones

Resolver

$$\begin{cases} x + 5y = 2, & \textbf{(24)} \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y = 1. & \textbf{(25)} \end{cases}$$

Solución: empezamos eliminando x de la segunda ecuación. Multiplicando la ecuación (25) por -2, tenemos

$$\begin{cases} x + 5y = 2, & \textbf{(26)} \\ -x - 5y = -2. & \textbf{(27)} \end{cases}$$

Sumando la ecuación (26) a la (27) se obtiene

$$\begin{cases} x + 5y = 2, & \textbf{(28)} \\ 0 = 0. & \textbf{(29)} \end{cases}$$

Puesto que la ecuación (29) *siempre* es cierta, cualquier solución de la ecuación (28) es una solución del sistema. Ahora veamos cómo podemos expresar nuestra respuesta. De la ecuación (28) tenemos $x = 2 - 5y$, donde y puede ser cualquier número real, digamos r. Por tanto, podemos escribir $x = 2 - 5r$. La solución completa es

$$x = 2 - 5r,$$
$$y = r,$$

donde r es cualquier número real. En esta situación, r se denomina un **parámetro,** y decimos que tenemos una familia de soluciones con un parámetro. Cada valor de r determina una solución particular. Por ejemplo, si $r = 0$, entonces $x = 2$ y $y = 0$, es una solución; si $r = 5$, entonces $x = -23$ y $y = 5$ es otra solución. Es claro que el sistema tiene un número infinito de soluciones.

Es útil notar que al escribir las ecuaciones (24) y (25) en sus formas pendientes-intersección al origen, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}, \\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}, \end{cases}$$

en el que ambas ecuaciones representan a la misma recta. De aquí que las rectas coincidan (véase la fig. 4.33) y las ecuaciones (24) y (25) sean equivalentes. La solución al sistema consiste en las parejas de coordenadas de todos los puntos sobre la recta $x + 5y = 2$, puntos que están dados por nuestra solución paramétrica.

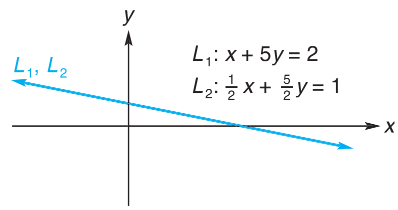


FIGURA 4.33 Sistema lineal del ejemplo 3; un número infinito de soluciones.

Tecnología

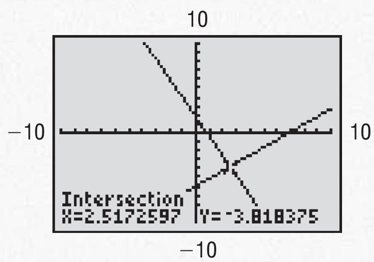


FIGURA 4.34 Solución gráfica del sistema.

Resolver de manera gráfica el sistema

$$\begin{cases} 9x + 4.1y = 7, \\ 2.6x - 3y = 18. \end{cases}$$

Solución: primero resolvemos cada ecuación para y de modo que cada ecuación tenga la forma $y = f(x)$.

$$y = \frac{1}{4.1}(7 - 9x),$$

$$y = -\frac{1}{3}(18 - 2.6x).$$

Ahora introducimos estas funciones como Y_1 y Y_2, y las desplegamos sobre el mismo rectángulo de visualización (véase la fig. 4.34). Por último, ya sea utilizando la característica de trazado y acercamiento, o bien, la de intersección, estimamos la solución como $x = 2.52$ $y = -3.82$.

EJEMPLO 4 Mezcla

Un fabricante de productos químicos debe surtir una orden de 500 *litros de solución de ácido al* 25% (25% *del volumen es ácido*). *Si en existencia hay disponibles soluciones al* 30% *y al* 18%, *¿cuántos litros de cada una debe mezclar para surtir el pedido?*

Solución: sean x y y, respectivamente, el número de litros de las soluciones al 30% y 18% que deben mezclarse. Entonces

$$x + y = 500.$$

Para ayudar a visualizar la situación, dibujamos el diagrama en la figura 4.35. En 500 litros de una solución al 25%, habrá 0.25(500) = 125 litros de ácido. Este ácido proviene de dos fuentes: $0.30x$ litros de la solución al 30% y $0.18y$ litros provienen de la solución al 18%. De aquí que,

$$0.30x + 0.18y = 125.$$

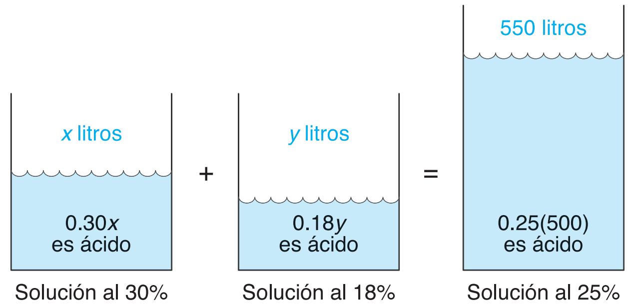


FIGURA 4.35 Problema de la mezcla.

Estas dos ecuaciones forman un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Si resolvemos la primera para x obtenemos $x = 500 - y$. Sustituyendo en la segunda se obtiene

$$0.30(500 - y) + 0.18y = 125.$$

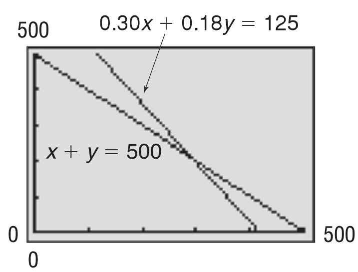


FIGURA 4.36 Gráfica para el ejemplo 4.

Resolviendo ésta para y, encontramos que $y = 208\frac{1}{3}$ litros. Así $x = 500 - 208\frac{1}{3} = 291\frac{2}{3}$ litros (véase la fig. 4.36).

Sistemas con tres variables

Los métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos variables también pueden utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres variables. Una **ecuación lineal general con tres variables *x*, *y* y *z*** es una ecuación que tiene la forma

$$Ax + By + Cz = D,$$

donde A, B, C y D son constantes y A, B y C no son todas cero. Por ejemplo, $2x - 4y + z = 2$ es una de tales ecuaciones. Una ecuación lineal general con tres variables representa geométricamente un *plano* en el espacio, y una solución al sistema de tales ecuaciones es la intersección de los planos. El ejemplo 5 muestra cómo resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables.

Principios en práctica 4
Resolución de un sistema lineal de tres variables

Una cafetería se especializa en mezclas de café. Con base en café de tipo A, tipo B y tipo C, el dueño quiere preparar una mezcla que venderá en \$8.50 por una bolsa de una libra. El costo por libra de estos cafés es de \$12, \$9 y \$7, respectivamente. La cantidad del tipo B debe ser el doble de la cantidad del tipo A. ¿Cuánto café de cada tipo estará en la mezcla final?

EJEMPLO 5 Resolución de un sistema lineal con tres variables

Resolver

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3, & \quad (30) \\ -x + 2y + 2z = 1, & \quad (31) \\ x - y - 3z = -6. & \quad (32) \end{cases}$$

Solución: este sistema está constituido por tres ecuaciones lineales con tres variables. De la ecuación (32), $x = y + 3z - 6$. Sustituyendo este valor para x en las ecuaciones (30) y (31), obtenemos

$$\begin{cases} 2(y + 3z - 6) + y + z = 3, \\ -(y + 3z - 6) + 2y + 2z = 1, \\ x = y + 3z - 6. \end{cases}$$

Simplificando, se obtiene

$$\begin{cases} 3y + 7z = 15, & (33) \\ \quad y - z = -5, & (34) \\ \qquad x = y + 3z - 6. & (35) \end{cases}$$

Observe que x no aparece en las ecuaciones (33) y (34). Puesto que cualquier solución del sistema original debe satisfacer las ecuaciones (33) y (34), primero debemos considerar su solución:

$$\begin{cases} 3y + 7z = 15, & (33) \\ \ y - \ \ z = -5. & (34) \end{cases}$$

De la ecuación (34), $y = z - 5$. Esto significa que podemos remplazar la ecuación (33) por

$$3(z - 5) + 7z = 15, \quad \text{o} \quad z = 3.$$

Como z es 3, podemos remplazar la ecuación (34) por $y = -2$. De aquí que el sistema anterior sea equivalente a

$$\begin{cases} z = 3, \\ y = -2. \end{cases}$$

El sistema original se transforma en

$$\begin{cases} z = 3, \\ y = -2, \\ x = y + 3z - 6, \end{cases}$$

de lo cual $x = 1$. La solución es $x = 1$, $y = -2$, y $z = 3$, que usted puede verificar.

Al igual que un sistema de dos variables puede tener una familia de soluciones con un parámetro, un sistema con tres variables puede tener una familia de soluciones con uno o dos parámetros.[6] Los dos ejemplos siguientes lo ilustran.

EJEMPLO 6 Familia de soluciones con un parámetro

Resolver

$$\begin{cases} \qquad x - 2y = 4, & (35) \\ 2x - 3y + 2z = -2, & (36) \\ 4x - 7y + 2z = 6. & (37) \end{cases}$$

Solución: observe que, ya que la ecuación (35) puede escribirse como $x - 2y + 0z = 4$, podemos considerar a las ecuaciones (35) a (37) como un sistema de tres ecuaciones lineales en las variables x, y y z. De la ecuación (35) tenemos $x = 2y + 4$. Podemos emplear esta ecuación y el método de sustitución para eliminar x de las ecuaciones (36) y (37):

$$\begin{cases} \qquad\qquad\qquad x = 2y + 4, \\ 2(2y + 4) - 3y + 2z = -2, \\ 4(2y + 4) - 7y + 2z = 6. \end{cases}$$

[6]Nota para el profesor: los ejemplos 6 y 7 pueden omitirse sin pérdida de continuidad.

O de manera más sencilla,

$$\begin{cases} x = 2y + 4, & (38) \\ y + 2z = -10, & (39) \\ y + 2z = -10. & (40) \end{cases}$$

Multiplicando la ecuación (40) por -1 se obtiene

$$\begin{cases} x = 2y + 4, \\ y + 2z = -10, \\ -y - 2z = 10. \end{cases}$$

Sumando la segunda ecuación a la tercera se obtiene

$$\begin{cases} x = 2y + 4, \\ y + 2z = -10, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Como la ecuación $0 = 0$ siempre es verdadera, en esencia podemos tratar con el sistema

$$\begin{cases} x = 2y + 4, & (41) \\ y + 2z = -10. & (42) \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación (42) para y, tenemos

$$y = -10 - 2z,$$

que expresa a y en términos de z. También podemos expresar a x en términos de z. De la ecuación (41),

$$\begin{aligned} x &= 2y + 4 \\ &= 2(-10 - 2z) + 4 \\ &= -16 - 4z. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{cases} x = -16 - 4z, \\ y = -10 - 2z. \end{cases}$$

Como no hay restricciones sobre z, esto sugiere una familia de soluciones paramétricas. Haciendo $z = r$, tenemos la familia de soluciones siguiente para el sistema dado:

$$\begin{aligned} x &= -16 - 4r, \\ y &= -10 - 2r, \\ z &= r, \end{aligned}$$

Son posibles otras representaciones paramétricas de la solución.

donde r puede ser cualquier número real. Entonces, vemos que el sistema dado tiene un número infinito de soluciones. Por ejemplo, haciendo $r = 1$ se obtiene la solución particular $x = -20$, $y = -12$ y $z = 1$.

EJEMPLO 7 Familia de soluciones con dos parámetros

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 2x + 4y + 2z = 8. \end{cases}$$

Solución: éste es un sistema de dos ecuaciones lineales con tres variables. Eliminaremos x de la segunda ecuación multiplicándola primero por $-\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ -x - 2y - z = -4. \end{cases}$$

Sumando la primera ecuación a la segunda se obtiene

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ \qquad\qquad 0 = 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación, obtenemos

$$x = 4 - 2y - z.$$

Como no existe restricción sobre y o z, éstos pueden ser números reales arbitrarios, lo que nos da una familia de soluciones con dos parámetros. Haciendo $y = r$ y $z = s$, encontramos que la solución del sistema es

$$x = 4 - 2r - s,$$

$$y = r,$$

$$z = s,$$

donde r y s pueden ser cualesquiera números reales. Cada asignación de valores a r y a s da una solución del sistema, de modo que existe un número infinito de soluciones. Por ejemplo, haciendo $r = 1$ y $s = 2$ se obtiene la solución particular $x = 0$, $y = 1$ y $z = 2$.

Ejercicio 4.4

En los problemas del 1 al 24 resuelva algebraicamente los sistemas.

1. $\begin{cases} x + 4y = 3, \\ 3x - 2y = -5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x + 2y = 9, \\ 5y - 4x = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x - 4y = 13, \\ 2x + 3y = 3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ -x + 2y = 7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5v + 2w = 36, \\ 8v - 3w = -54. \end{cases}$

6. $\begin{cases} -p - q = -3, \\ 3p + 2q = 19. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - 2y = -7, \\ 5x + 3y = -9. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x + 5y = 7, \\ 5x + 9y = 7. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x - 3y - 2 = 3x - 7y, \\ x + 5y - 2 = y + 4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x + 7y + 2 = 9y - 4x + 6, \\ \frac{21}{2}x - \frac{4}{3}y - \frac{11}{4} = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y + \frac{5}{4}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 2, \\ \frac{3}{8}x + \frac{5}{6}y = -\frac{11}{2}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}w = \frac{1}{6}, \\ z + \frac{1}{2}w = \frac{2}{3}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4p + 12q = 6, \\ 2p + 6q = 3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 5x - 3y = 2, \\ -10x + 6y = 4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x + y + 6z = 3, \\ x - y + 4z = 1, \\ 3x + 2y - 2z = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + y + z = -1, \\ 3x + y + z = 1, \\ 4x - 2y + 2z = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 5x - 7y + 4z = 2, \\ 3x + 2y - 2z = 3, \\ 2x - y + 3z = 4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ -2x + y - 3z = 15, \\ \frac{3}{2}x + \frac{4}{5}y + 4z = 10. \end{cases}$

[7]**19.** $\begin{cases} x - 2z = 1, \\ y + z = 3. \end{cases}$

[7]**20.** $\begin{cases} 2y + 3z = 1, \\ 3x - 4z = 0. \end{cases}$

[7]**21.** $\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 2x + y - z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0. \end{cases}$

[7]**22.** $\begin{cases} x - 2y - z = 0, \\ 2x - 4y - 2z = 0, \\ -x + 2y + z = 0. \end{cases}$

[7]**23.** $\begin{cases} 2x + 2y - z = 3, \\ 4x + 4y - 2z = 6. \end{cases}$

[7]**24.** $\begin{cases} x + 2y - 3z = -4, \\ 2x + y - 3z = 4. \end{cases}$

[7]Hace referencia a los conceptos de los ejemplos 6 y 7.

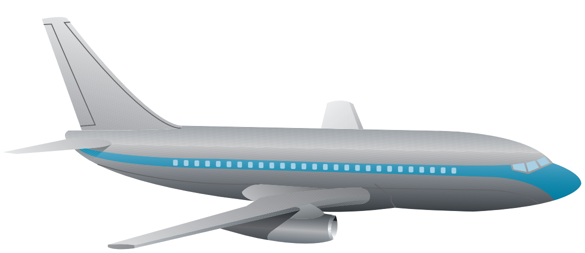
25. Mezcla Un fabricante de productos químicos desea surtir un pedido de 700 galones de una solución de ácido al 24%. En existencia tiene soluciones al 20% y 30%. ¿Cuántos galones de cada solución debe mezclar para surtir el pedido?

26. Mezcla Un jardinero tiene dos fertilizantes que contienen diferentes concentraciones de nitrógeno. Uno tiene 3% de nitrógeno y el otro tiene 11% de nitrógeno. ¿Cuántas libras de cada fertilizante debe mezclar para obtener 20 libras con una concentración de 9%?

27. Tejidos Una fábrica de tejidos produce un tejido hecho a partir de diferentes fibras. Con base en algodón, poliéster y nylon, el propietario necesita producir un tejido combinado que cueste $3.25 por libra fabricada. El costo por libra de estas fibras es de $4.00, $3.00 y $2.00, respectivamente. La cantidad de nylon debe ser la misma que la cantidad de poliéster. ¿Cuánto de cada fibra debe tener el tejido final?

28. Impuesto Una compañía tiene ingresos gravables por $312,000. El impuesto federal es el 25% de la parte que queda después que el impuesto estatal ha sido pagado. El impuesto estatal es un 10% de la parte que queda después que el federal ha sido pagado. Encuentre los impuestos federal y estatal.

29. Velocidad de un aeroplano Un aeroplano recorre 900 millas en 3 horas con viento a favor. Le toma 3 horas 36 minutos el viaje de regreso volando en contra del viento. Encuentre la velocidad del aeroplano sin viento, calcule también la velocidad del viento.

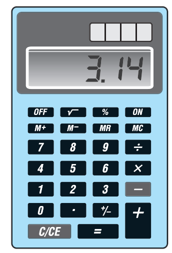


30. Velocidad de una balsa En un viaje en balsa tomó $\frac{3}{4}$ de hora recorrer 12 millas río abajo. El viaje de regreso tomó $1\frac{1}{2}$ horas. Encuentre la velocidad de la balsa con el agua en calma, y calcule la velocidad de la corriente.

31. Venta de muebles Un fabricante de comedores produce dos estilos, Early American y Contemporáneo. Por su experiencia, el administrador ha determinado que pueden venderse 20% más comedores Early American que Contemporáneo. En cada venta de un Early American hay una utilidad de $250, mientras que se gana $350 en cada Contemporáneo. Si en el año próximo, el administrador desea una ganancia total de $130,000, ¿cuántas unidades de cada estilo deben venderse?

32. Encuesta A Encuestas Nacionales se le concedió un contrato para realizar una encuesta de preferencia de producto para Crispy Crackers. Un total de 250 personas fueron entrevistadas. Encuestas Nacionales reportó que a 62.5% más de las personas les gustaba Crispy Crakers que a las que no les gustaba. Sin embargo, el reporte no indicó que el 16% de las personas entrevistadas no habían contestado. ¿A cuántas de las personas entrevistadas les gustó Crispy Crakers? ¿A cuántas no? ¿Cuántas no contestaron?

33. Costo de igualación Productos Unidos, S. A., fabrica calculadoras y tiene plantas en las ciudades de Exton y Whyton. En la planta de Exton, los costos fijos son de $7000 por mes, y el costo de producir cada calculadora es de $7.50. En la planta de Whyton, los costos fijos son de $8800 por mes y cada calculadora cuesta $6 producirla. Si el mes siguiente, Productos Unidos debe producir 1500 calculadoras, ¿cuántas debe producir cada planta si el costo total en cada una debe ser el mismo?



34. Mezcla de café Un comerciante de café mezcla tres tipos de café que cuestan $2.20, $2.30 y $2.60 por libra, para obtener 100 lb de café que vende a $2.40 por libra. Si utiliza la misma cantidad de los dos cafés más caros, ¿cuánto de cada tipo debe utilizar en la mezcla?

35. Comisiones Una compañía paga a sus agentes de ventas con base en un porcentaje de los primeros $100,000 en ventas, más otro porcentaje sobre cualquier cantidad que rebase esos $100,000. Si un agente recibió $8500 por ventas de $175,000, y otro recibió $14,800 por ventas de $280,000, encuentre los dos porcentajes.

36. Utilidades anuales En reportes financieros, las utilidades de una compañía en el año actual (T) con frecuencia son comparadas con las del año anterior (L), pero los valores reales de T y L no siempre son dados. Este año una compañía tuvo una utilidad de $20 millones más que el año pasado. Las utilidades fueron 25% mayores. A partir de estos datos determine T y L.

37. Producción La compañía Controles Universales fabrica unidades de control. Sus modelos nuevos son el Argón I y el Argón II. Para fabricar cada unidad de Argón I, usan 6 medidores y 3 controladores. Para fabricar cada unidad de Argón II, usan 10 medidores y 8 controladores. La compañía recibe un total de 760 medidores y 500 controladores diarios de sus proveedores. ¿Cuántas unidades de cada modelo puede producir diariamente? Suponga que se utilizan todas las partes.

38. Inversiones Una persona tiene dos inversiones y el porcentaje de ganancia por año en cada una de ellas es el mismo. Del total de la cantidad invertida $\frac{3}{10}$ de ella más $600 se invirtieron en una empresa de riesgo, y al final de un año la persona recibió un rendimiento de $384 de esa empresa. Si el rendimiento total después de un año fue de $1120, encuentre la cantidad total invertida.

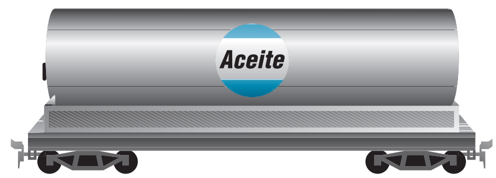
39. Producción Una compañía produce tres tipos de muebles para patio: sillas, mecedoras y sillones reclinables. Cada uno requiere de madera, plástico y aluminio, como se indica en la tabla siguiente. La compañía tiene en existencia 400 unidades de madera, 600 unidades de plástico y 1500 unidades de aluminio. Para la corrida de fin de temporada, la compañía quiere utilizar todas sus existencias. Para hacer esto, ¿cuántas sillas, mecedoras y sillones debe fabricar?

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sillón reclinable	1 unidad	2 unidades	5 unidades

40. Inversiones Un total de $35,000 se invirtieron a tres tasas de interés: 7, 8 y 9%. El interés en el primer año fue de $2830, que no se reinvirtió. El segundo año la cantidad originalmente invertida al 9% devengó un 10%, y las otras tasas permanecieron iguales. El interés total en el segundo año fue de $2960. ¿Cuánto se invirtió a cada tasa?

41. Contratación de trabajadores Una compañía paga a sus trabajadores calificados $15 por hora en su departamento de ensamblado. Los trabajadores semicalificados en ese departamento ganan $9 por hora. A los empleados de envíos se les paga $10 por hora. A causa de un incremento en los pedidos, la compañía necesita contratar un total de 70 trabajadores en los departamentos de ensamblado y envíos. Pagará un total de $760 por hora a estos empleados. A causa de un contrato con el sindicato, deben emplearse el doble de trabajadores semicalificados que de trabajadores calificados. ¿Cuántos trabajadores semicalificados, calificados y empleados de envíos debe contratar la compañía?

42. Almacenamiento de un disolvente Un tanque de ferrocarril de 10,000 galones se llenará con disolvente de dos tanques de almacenamiento, A y B. El disolvente de A se bombea a una velocidad de 20 gal/min. El disolvente B se bombea a una velocidad de 30 gal/min. En general, ambas bombas operan al mismo tiempo. Sin embargo, a causa de un fusible fundido la bomba en A estuvo sin funcionar 10 minutos. ¿Cuántos galones de cada tanque de almacenamiento se utilizarán para llenar el tanque del ferrocarril?



43. Verifique su respuesta al problema 1 utilizando su calculadora gráfica.

44. Verifique su respuesta al problema 11 utilizando su calculadora gráfica.

45. Resuelva de manera gráfica el sistema.

$$\begin{cases} 0.24x - 0.34y = 0.04, \\ 0.11x + 0.21y = 0.75. \end{cases}$$

46. Resuelva de manera gráfica el sistema

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ \frac{1}{4}x + \frac{2}{5}y = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Redondee los valores de x y y a dos decimales.

47. Resuelva de manera gráfica el sistema

$$\begin{cases} 0.5736x - 0.3420y = 0, \\ 0.8192x + 0.9397y = 20. \end{cases}$$

Redondee los valores de x y y a un decimal.

OBJETIVO Utilizar la sustitución para resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

4.5 SISTEMAS NO LINEALES

Un sistema de ecuaciones en el que al menos una ecuación es no lineal se llama **sistema no lineal.** Con frecuencia podemos resolver un sistema no lineal por sustitución, como se hizo con los sistemas lineales. Los ejemplos siguientes lo ilustran.

EJEMPLO 1 Solución de un sistema no lineal

Resolver

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y - 7 = 0, & (1) \\ 3x - y + 1 = 0. & (2) \end{cases}$$

Solución:

> **Estrategia:** si un sistema no lineal contiene una ecuación lineal, en general despejamos una de las variables de la ecuación lineal y sustituimos esa variable en la otra ecuación.

Si resolvemos la ecuación (2) para y se obtiene

$$y = 3x + 1. \tag{3}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) y simplificando, tenemos

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + (3x + 1) - 7 &= 0, \\ x^2 + x - 6 &= 0, \\ (x + 3)(x - 2) &= 0, \\ x = -3 \quad \text{o} \quad x &= 2. \end{aligned}$$

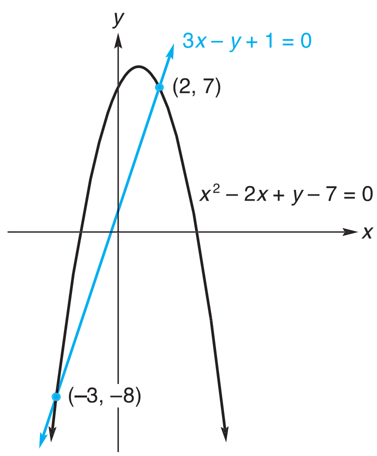


FIGURA 4.37 Sistema de ecuaciones no lineales.

Si $x = -3$, entonces la ecuación (3) implica que $y = -8$; si $x = 2$, entonces $y = 7$. Debe verificar que cada pareja de valores satisfaga el sistema dado. De aquí que las soluciones sean $x = -3, y = -8$ y $x = 2, y = 7$. La solución geométrica se presenta en la gráfica del sistema de la figura 4.37. Observe que la gráfica de la ecuación (1) es una parábola y la de la ecuación (2) una recta. Las soluciones corresponden a los puntos de intersección $(-3, -8)$ y $(2, 7)$.

Este ejemplo ilustra la necesidad de verificar todas las "soluciones".

EJEMPLO 2 Resolución de un sistema no lineal

Resolver

$$\begin{cases} y = \sqrt{x + 2}, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

Solución: al resolver la segunda ecuación, que es lineal, para y se obtiene

$$y = 4 - x. \tag{4}$$

Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} 4 - x &= \sqrt{x + 2}, \\ 16 - 8x + x^2 &= x + 2 \qquad \text{(elevando al cuadrado ambos lados),} \\ x^2 - 9x + 14 &= 0, \\ (x - 2)(x - 7) &= 0. \end{aligned}$$

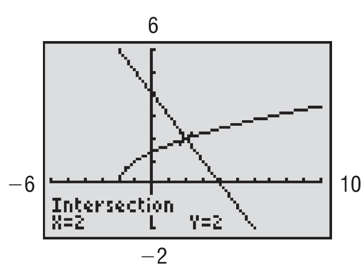


FIGURA 4.38 Sistema no lineal del ejemplo 2.

Por tanto, $x = 2$ o $x = 7$. De la ecuación (4), si $x = 2$, entonces $y = 2$; si $x = 7$, entonces $y = -3$. Puesto que realizamos la operación de elevar al cuadrado en ambos miembros, debemos verificar nuestros resultados. Mientras que la pareja $x = 2$ y $y = 2$ satisface ambas ecuaciones originales, éste no es el caso para $x = 7$ y $y = -3$. Por tanto, la solución es $x = 2, y = 2$ (véase la fig. 4.38).

Tecnología

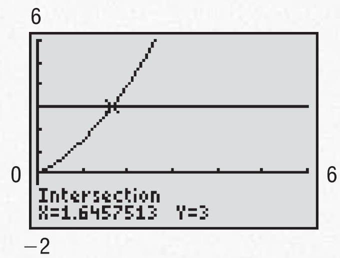


FIGURA 4.39 Solución de $0.5x^2 + x = 3$.

Resolver gráficamente la ecuación $0.5x^2 + x = 3$, *donde* $x \geq 0$.

Solución: para resolver la ecuación, podríamos encontrar los ceros de la función $f(x) = 0.5x^2 + x - 3$. De manera alterna, podemos pensar en este problema como la solución del sistema no lineal

$$y = 0.5x^2 + x,$$

$$y = 3.$$

En la figura 4.39, se estima que el punto de intersección es $x = 1.65$, $y = 3$. Observe que la gráfica de $y = 3$ es una recta horizontal. La solución de la ecuación dada es $x = 1.65$.

Ejercicio 4.5

En los problemas del 1 al 14 resuelva el sistema no lineal dado.

1. $\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ 3x + y = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = x^3, \\ x - y = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} p^2 = 5 - q, \\ p = q + 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y^2 - x^2 = 28, \\ x - y = 14. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = y^2, \\ y = x^2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} p^2 - q = 0, \\ 3q - 2p - 1 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y = 4x - x^2 + 8, \\ y = x^2 - 2x. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 - y = 8, \\ y - x^2 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} p = \sqrt{q}, \\ p = q^2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} z = 4/w, \\ 3z = 2w + 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2 = y^2 + 13, \\ y = x^2 - 15. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 1, \\ 3x - y = 5. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = y + 6, \\ y = 3\sqrt{x + 4}. \end{cases}$

14. $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{x - 1} + 1, \\ y = \dfrac{1}{x - 1}. \end{cases}$

15. Decoración La forma de una serpentina suspendida por encima de una pista de baile, puede describirse por medio de la función $y = 0.01x^2 + 0.01x + 7$, en donde y es la altura de la serpentina (en pies) por encima del piso, y x es la distancia horizontal (en pies) desde el centro del salón. Una cuerda descrita por medio de la función $y = 0.01x + 8.0$, y que sujeta otra decoración toca a la serpentina. ¿En dónde toca la cuerda a la serpentina?

16. Marquesina La forma de una marquesina decorativa sobre una fachada puede describirse por medio de la función $y = 0.06x^2 + 0.012x + 8$, en donde y es la altura del borde de la marquesina (en pies) por encima de la acera, y x es la distancia (en pies) medida desde el centro del portal de la tienda. Un vándalo mete un palo a través de la marquesina, perforando en dos lugares. La posición del palo puede describirse por medio de la función $y = 0.912x + 5$. ¿En qué parte de la marquesina están los agujeros que hizo el vándalo?

17. Determine de manera gráfica, el número de soluciones que tiene el sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x}, \\ y = x^2 - 4. \end{cases}$$

18. Resuelva en forma gráfica el sistema

$$\begin{cases} y = x^3, \\ y = 6 - x^2 \end{cases}$$

con un decimal de precisión.

19. Resuelva en forma gráfica el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1, \\ y = x^3 + x^2 - 2x + 3 \end{cases}$$

con un decimal de precisión.

20. Resuelva en forma gráfica el sistema

$$\begin{cases} y = x^3 - x, \\ y = 4x \end{cases}$$

con un decimal de precisión.

En los problemas del 21 al 23 resuelva gráficamente la ecuación tratándola como un sistema. Redondee las respuestas a dos decimales.

21. $0.8x^2 + 2x = 6$, donde $x \geq 0$.

22. $\sqrt{x + 2} = 5 - x$.

23. $x^3 - 3x^2 = x - 8$.

OBJETIVO Resolver sistemas que describen situaciones de equilibrio y puntos de equilibrio.

4.6 Aplicaciones de sistemas de ecuaciones

Equilibrio

Recuerde de la sección 4.2 que una ecuación que relaciona el precio por unidad y la cantidad demandada (suministrada), se llama *ecuación de demanda* (*ecuación de oferta*). Suponga que para un producto Z la ecuación de demanda es

$$p = -\frac{1}{180}q + 12 \tag{1}$$

y la ecuación de oferta es

$$p = \frac{1}{300}q + 8, \tag{2}$$

donde $q, p \geq 0$. Las correspondientes curvas de demanda y oferta son las líneas de las figuras 4.40 y 4.41, respectivamente. Al analizar la figura 4.40, vemos que los clientes comprarán 540 unidades por semana cuando el precio sea de \$9 por unidad, 1080 unidades cuando el precio sea \$6 y así sucesivamente. La figura 4.41 muestra que cuando el precio es de \$9 por unidad, los productores colocarán 300 unidades por semana en el mercado, a \$10 colocarán 600 unidades, y así sucesivamente.

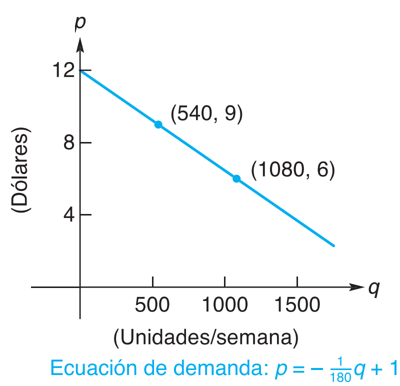


FIGURA 4.40 Curva de demanda.

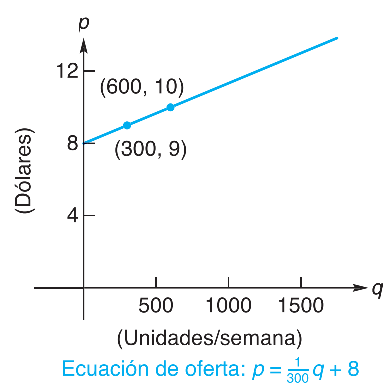


FIGURA 4.41 Curva de oferta.

Cuando las curvas de demanda y oferta de un producto se representan en el mismo plano de coordenadas, el punto (m, n) en donde las curvas se intersecan se llama **punto de equilibrio** (véase la fig. 4.42). El precio, n, llamado **precio de equilibrio,** es el precio al que los consumidores comprarán la misma cantidad de un producto, que los productores ofrezcan a ese precio. En resumen, n es el precio en que se da una estabilidad entre productor y consumidor. La cantidad m se llama **cantidad de equilibrio.**

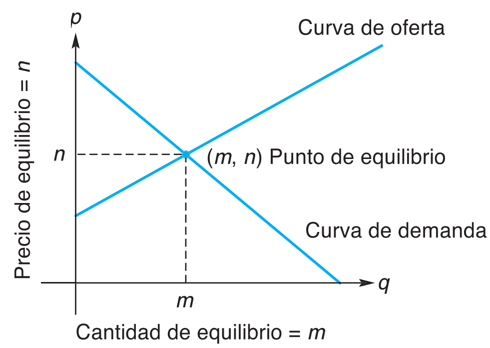


FIGURA 4.42 Equilibrio.

Para determinar con precisión el punto de equilibrio, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de oferta y demanda. Hagamos esto para los datos anteriores, es decir, el sistema

$$\begin{cases} p = -\dfrac{1}{180}q + 12 & \text{(ecuación de demanda),} \\ p = \dfrac{1}{300}q + 8 & \text{(ecuación de oferta).} \end{cases}$$

Sustituyendo p por $\frac{1}{300}q + 8$ en la ecuación de demanda, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{300}q + 8 &= -\frac{1}{180}q + 12, \\ \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{180}\right)q &= 4, \\ q &= 450 \qquad \text{(cantidad de equilibrio).} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{300}(450) + 8 \\ &= 9.50 \qquad \text{(precio de equilibrio),} \end{aligned}$$

y el punto de equilibrio es (450, 9.50). Por tanto, al precio de \$9.50 por unidad, los fabricantes producirían exactamente la cantidad (450) de unidades por semana que los consumidores comprarían a ese precio (véase la fig. 4.43).

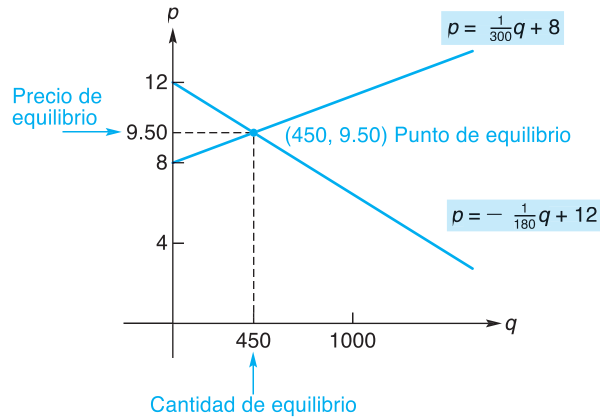


FIGURA 4.43 Equilibrio.

EJEMPLO 1 Efecto de los impuestos sobre el equilibrio

Sea $p = \frac{8}{100}q + 50$ *la ecuación de oferta para el producto de un fabricante y suponga que la ecuación de demanda es* $p = -\frac{7}{100}q + 65$.

a. *Si se cobra al fabricante un impuesto de* \$1.50 *por unidad, ¿cómo se afectará el precio de equilibrio original si la demanda permanece igual?*

Solución: antes del impuesto, el precio de equilibrio se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} p = \dfrac{8}{100}q + 50, \\ p = -\dfrac{7}{100}q + 65. \end{cases}$$

Por sustitución,

$$-\frac{7}{100}q + 65 = \frac{8}{100}q + 50,$$

$$15 = \frac{15}{100}q,$$

$$100 = q,$$

y

$$p = \frac{8}{100}(100) + 50 = 58.$$

Por tanto, \$58 es el precio de equilibrio original. Antes del impuesto el fabricante ofrecía q unidades a un precio de $p = \frac{8}{100}q + 50$ por unidad. Después del impuesto venderá las mismas q unidades con el \$1.50 adicional por unidad. El precio por unidad será $(\frac{8}{100}q + 50) + 1.50$, de modo que la nueva ecuación de oferta es

$$p = \frac{8}{100}q + 51.50.$$

La resolución del sistema

$$\begin{cases} p = \dfrac{8}{100}q + 51.50, \\ p = -\dfrac{7}{100}q + 65 \end{cases}$$

dará el nuevo precio de equilibrio:

$$\frac{8}{100}q + 51.50 = -\frac{7}{100}q + 65,$$

$$\frac{15}{100}q = 13.50,$$

$$q = 90,$$

$$p = \frac{8}{100}(90) + 51.50 = 58.70.$$

El impuesto de \$1.50 por unidad incrementó el precio de equilibrio en \$0.70 (véase la fig. 4.44). Observe que también existe una disminución en la cantidad de equilibrio, de $q = 100$ a $q = 90$, a causa del cambio en el precio de equilibrio (en los ejercicios se le pide que determine el efecto de un subsidio dado al fabricante, lo cual reducirá el precio del producto).

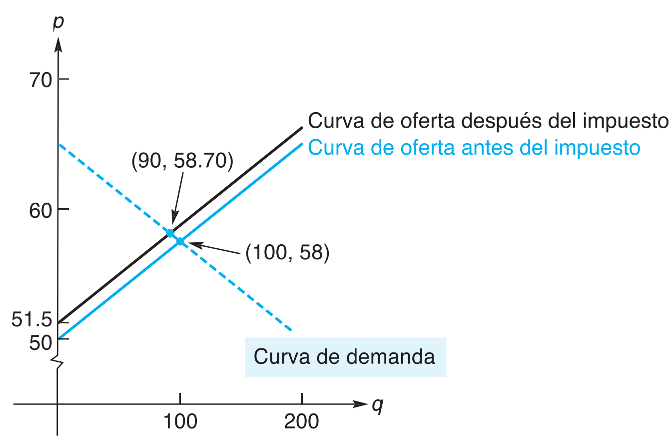


FIGURA 4.44 Equilibrio antes y después del impuesto.

b. *Determinar el ingreso total obtenido por el fabricante en el punto de equilibrio antes y después del impuesto.*

Solución: si se venden q unidades de un producto a un precio de p dólares cada una, entonces el ingreso total está dado por

$$y_{\mathrm{TR}} = pq.$$

Antes del impuesto, el ingreso en (100, 58) es (en dólares)

$$y_{\mathrm{TR}} = (58)(100) = 5800.$$

Después del impuesto es

$$y_{TR} = (58.70)(90) = 5283,$$

que es una disminución.

EJEMPLO 2 Equilibrio con demanda no lineal

Encontrar el punto de equilibrio si las ecuaciones de oferta y demanda de un producto son $p = \frac{q}{40} + 10$ *y* $p = \frac{8000}{q}$*, respectivamente.*

Solución: aquí la ecuación de demanda no es lineal. Al resolver el sistema

$$\begin{cases} p = \dfrac{q}{40} + 10, \\ p = \dfrac{8000}{q} \end{cases}$$

por sustitución se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{8000}{q} &= \frac{q}{40} + 10, \\ 320{,}000 &= q^2 + 400q \quad \text{(multiplicando ambos miembros por } 40q\text{)}, \\ q^2 + 400q - 320{,}000 &= 0, \\ (q + 800)(q - 400) &= 0, \\ q = -800 \quad &\text{o} \quad q = 400. \end{aligned}$$

Descartamos $q = -800$, ya que q representa una cantidad. Eligiendo $q = 400$, tenemos $p = (8000/400) = 20$, de modo que el punto de equilibrio es $(400, 20)$. (Véase la fig. 4.45.)

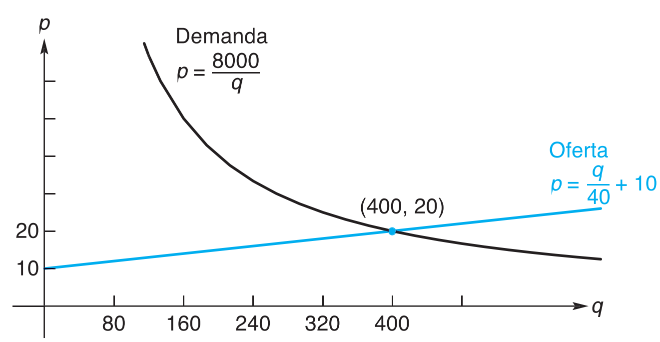


FIGURA 4.45 Equilibrio con demanda no lineal.

Puntos de equilibrio

Suponga que un fabricante produce un producto A y lo vende a $8 por unidad. Entonces, el ingreso total y_{TR} recibido (en dólares) de la venta de q unidades es

$$y_{TR} = 8q \qquad \text{(ingreso total).}$$

La diferencia entre el ingreso total recibido por q unidades y el costo total de q unidades, es la utilidad del fabricante (o pérdida si es negativa):

$$\textbf{utilidad (o pérdida)} = \textbf{ingreso total} - \textbf{costo total.}$$

El **costo total,** y_{TR}, es la suma de los costos totales variables y_{VC}, y los costos totales fijos y_{FC}.

$$y_{TC} = y_{VC} + y_{FC}.$$

Los **costos fijos** son aquellos costos que bajo condiciones normales no dependen del nivel de producción; esto es, en algún periodo permanecen constantes en todos los niveles de producción (ejemplos son renta, salario de los oficinistas y mantenimiento normal). Los **costos variables** son los que varían con el nivel de producción (como el costo de materiales, salarios, mantenimiento debido al uso y desgaste, etc.). Suponga que, para q unidades de producto A,

$$y_{FC} = 5000 \qquad \text{(costo fijo)}$$

$$\text{y} \quad y_{VC} = \frac{22}{9}q \qquad \text{(costo variable).}$$

Entonces

$$y_{TC} = \frac{22}{9}q + 5000 \qquad \text{(costo total).}$$

Las gráficas del costo total y del ingreso total aparecen en la figura 4.46. El eje horizontal representa el nivel de producción, q, y el eje vertical representa el valor total, en dólares, del ingreso o del costo. El **punto de equilibrio** es el punto en que el ingreso total es igual al costo total (TR = TC); ocurre cuando los niveles de producción y de ventas tienen como resultado cero pérdidas y cero utilidades. En el diagrama, llamado *diagrama del punto de equilibrio*, está el punto (m, n), en el que las gráficas de $y_{TR} = 8q$ y $y_{TC} = \frac{22}{9}q + 5000$ se intersecan. Llamamos a m la **cantidad de equilibrio** y a n el **ingreso de equilibrio.** Cuando el costo total y el ingreso total están relacionados de manera lineal con la producción, como es nuestro caso, para cualquier nivel de producción mayor que m, el ingreso total es mayor que el costo total, lo que trae como resultado una utilidad. Sin embargo, en cualquier nivel menor de m unidades, el ingreso total es menor que el costo total, lo que trae como resultado una pérdida. Para una producción de m unidades la utilidad es cero. En el ejemplo siguiente examinaremos nuestros datos con mayor detalle.

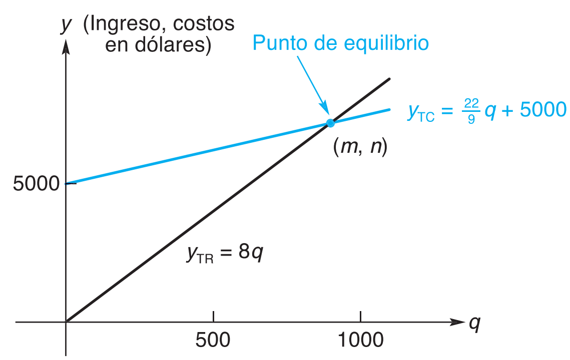


FIGURA 4.46 Diagrama de equilibrio.

EJEMPLO 3 Punto de equilibrio, utilidad y pérdida.

Un fabricante vende un producto a \$8 por unidad, y vende todo lo que produce. El costo fijo es de \$5000 y el variable por unidad es de $\frac{22}{9}$ (dólares).

a. *Encontrar la producción y el ingreso total en el punto de equilibrio.*

Solución: a un nivel de producción de q unidades, el costo variable es $y_{VC} = \frac{22}{9}q$ y el ingreso total es $y_{TR} = 8q$. De aquí que

$$y_{TR} = 8q,$$

$$y_{TC} = y_{VC} + y_{FC} = \frac{22}{9}q + 5000.$$

En el punto de equilibrio, el ingreso total es igual al costo total. Ahora resolvemos el sistema formado por las ecuaciones anteriores. Como

$$y_{TR} = y_{TC},$$

Tenemos

$$8q = \frac{22}{9}q + 5000,$$

$$\frac{50}{9}q = 5000,$$

$$q = 900.$$

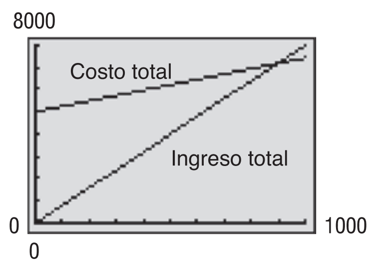


FIGURA 4.47 Punto de equilibrio (900, 7200).

Así que la producción deseada es de 900 unidades, lo que resulta en un ingreso total (en dólares) de

$$y_{TR} = 8(900) = 7200.$$

(Véase la fig. 4.47.)

b. *Encontrar la utilidad cuando se producen* 1800 *unidades.*

Solución: ya que utilidad = ingreso total − costo total, cuando $q = 1800$ tenemos

$$y_{TR} - y_{TC} = 8(1800) - \left[\frac{22}{9}(1800) + 5000\right]$$

$$= 5000.$$

La utilidad cuando se producen y venden 1800 unidades es de \$5000.

c. *Encontrar la pérdida cuando se producen* 450 *unidades.*

Solución: cuando $q = 450$,

$$y_{TR} - y_{TC} = 8(450) - \left[\frac{22}{9}(450) + 5000\right] = -2500.$$

Ocurre una pérdida de \$2500 cuando el nivel de producción es de 450 unidades.

d. *Encontrar la producción requerida para obtener una utilidad de* \$10,000.

Solución: para obtener una utilidad de \$10,000 tenemos

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total},$$

$$10{,}000 = 8q - \left(\frac{22}{9}q + 5000\right),$$

$$15{,}000 = \frac{50}{9}q,$$

$$q = 2700.$$

Así, deben producirse 2700 unidades.

EJEMPLO 4 Cantidad de equilibrio

Determinar la cantidad de equilibrio de Fabricaciones XYZ dada la información siguiente: costo fijo total, \$1200*; costo variable por unidad,* \$2*; ingreso total por la venta de q unidades,* $y_{TR} = 100\sqrt{q}$.

Solución: por q unidades de producción,

$$y_{TR} = 100\sqrt{q},$$

$$y_{TC} = 2q + 1200.$$

Igualando el ingreso total al costo total se obtiene

$$100\sqrt{q} = 2q + 1200,$$

$$50\sqrt{q} = q + 600 \qquad \text{(dividiendo ambos lados entre 2).}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, tenemos

$$2500q = q^2 + 1200q + (600)^2,$$

$$0 = q^2 - 1300q + 360{,}000.$$

Por medio de la fórmula cuadrática,

$$q = \frac{1300 \pm \sqrt{250{,}000}}{2},$$

$$q = \frac{1300 \pm 500}{2},$$

$$q = 400 \quad \text{o} \quad q = 900.$$

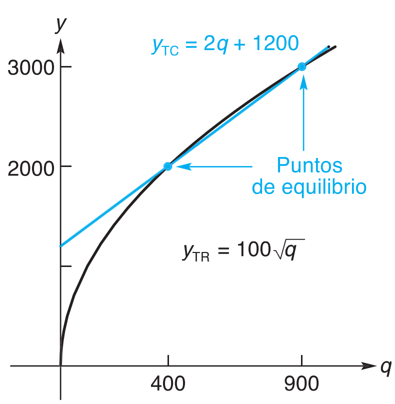


FIGURA 4.48 Dos puntos de equilibrio.

Aunque tanto $q = 400$, como $q = 900$ son cantidades de equilibrio, observe en la figura 4.48 que cuando $q > 900$, el costo total es mayor que el ingreso total, de modo que siempre se tendrá una pérdida. Esto ocurre porque aquí el ingreso total no está relacionado linealmente con la producción. Por tanto, producir más de la cantidad de equilibrio no necesariamente garantiza una utilidad.

Ejercicio 4.6

En los problemas del 1 al 8 se le da una ecuación de oferta y una de demanda para un producto. Si p representa el precio por unidad en dólares y q el número de unidades por unidad de tiempo, encuentre el punto de equilibrio. En los problemas 1 y 2, plantee el sistema.

1. Oferta: $p = \frac{3}{100}q + 2$,
Demanda: $p = -\frac{7}{100}q + 12$.

2. Oferta: $p = \frac{1}{2000}q + 3$,
Demanda: $p = -\frac{1}{2500}q + \frac{42}{5}$.

3. Oferta: $35q - 2p + 250 = 0$,
Demanda: $65q + p - 537.5 = 0$.

4. Oferta: $246p - 3.25q - 2460 = 0$,
Demanda: $410p + 3q - 14{,}452.5 = 0$.

5. Oferta: $p = 2q + 20$,
Demanda: $p = 200 - 2q^2$.

6. Oferta: $p = (q + 10)^2$,
Demanda: $p = 388 - 16q - q^2$.

7. Oferta: $p = \sqrt{q + 10}$,
Demanda: $p = 20 - q$.

8. Oferta: $p = \frac{1}{5}q + 7$,
Demanda: $p = \dfrac{3240}{q + 20}$.

En los problemas del 9 al 14 y_{TR} representa el ingreso total en dólares y y_{TC} el costo total en dólares para un fabricante. Si q representa tanto el número de unidades producidas como el número de unidades vendidas, encuentre la cantidad de equilibrio. Esquematice un diagrama de equilibrio en los problemas 9 y 10.

9. $y_{TR} = 3q$,
$y_{TC} = 2q + 4500$.

10. $y_{TR} = 14q$,
$y_{TC} = \frac{40}{3}q + 1200$.

11. $y_{TR} = 0.05q$,
$y_{TC} = 0.85q + 600$.

12. $y_{TR} = 0.25q$,
$y_{TC} = 0.16q + 360$.

13. $y_{TR} = 100 - \dfrac{1000}{q + 5}$,
$y_{TC} = q + 35$.

14. $y_{TR} = 0.1q^2 + 7q$,
$y_{TC} = 2q + 500$.

15. Negocios Las ecuaciones de oferta y demanda para cierto producto son

$$3q - 200p + 1800 = 0$$

y

$$3q + 100p - 1800 = 0,$$

respectivamente, donde p representa el precio por unidad en dólares y q el número de unidades vendidas por periodo.

a. Encuentre algebraicamente el precio de equilibrio y dedúzcalo por medio de una gráfica.
b. Encuentre el precio de equilibrio cuando se fija un impuesto de 27 centavos por unidad al proveedor.

16. Negocios Un fabricante vende todo lo que produce. Su ingreso total está dado por $y_{TR} = 7q$ y el costo total es $y_{TC} = 6q + 800$, donde q representa el número de unidades producidas y vendidas.

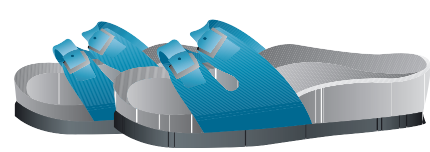
a. Encuentre el nivel de producción en el punto de equilibrio y dibuje el diagrama de equilibrio.
b. Encuentre el nivel de producción en el punto de equilibrio, si el costo total se incrementa en 5%.

17. Negocios Un fabricante vende un producto a \$8.35 por unidad, y vende todo lo que produce. Los costos fijos son de \$2116 y el costo variable es de \$7.20 por unidad. ¿A qué nivel de producción existirán utilidades de \$4600? ¿A qué nivel de producción habrá una pérdida de \$1150? ¿A qué nivel de producción ocurre el punto de equilibrio?

18. Negocios El punto de equilibrio de mercado para un producto ocurre cuando se producen 13,500 unidades a un precio de \$4.50 por unidad. El productor no proveerá unidades a \$1 y el consumidor no demandará unidades a \$20. Encuentre las ecuaciones de oferta y demanda si ambas son lineales.

19. Negocios Un fabricante de juguetes para niños alcanzará el punto de equilibrio en un volumen de ventas de \$200,000. Los costos fijos son de \$40,000 y cada unidad de producción se vende a \$5. Determine el costo variable por unidad.

20. Negocios La compañía Sandalias Cómodas fabrica sandalias para las que el costo del material es de \$0.80 por par, y el costo de mano de obra es de \$0.90 por par. Hay costos adicionales por par de \$0.30. Los costos fijos son de \$70,000. Si cada par se vende a \$2.50, ¿cuántos pares se deben vender para que la compañía llegue al equilibrio?



21. Negocios Encuentre el punto de equilibrio para la compañía Z, que vende todo lo que produce, si el costo variable por unidad es de $2, los costos fijos de $1050 y $y_{TR} = 50\sqrt{q}$, donde q es el número de unidades producidas.

22. Negocios Una compañía determinó que la ecuación de demanda para su producto es $p = 1000/q$, donde p es el precio por unidad para q unidades en algún periodo. Determine la cantidad demandada cuando el precio por unidad es (a)$4, (b)$2 y (c)$0.50. Para cada uno de estos precios calcule el ingreso total que la compañía recibirá. ¿Cuál será el ingreso sin importar el precio? (*Sugerencia*: encuentre el ingreso cuando el precio es p dólares.)

23. Negocios Utilizando los datos del ejemplo 1, determine cómo se afectará el precio de equilibrio original, si la compañía recibe un subsidio del gobierno de $1.50 por unidad.

24. Negocios La compañía Aceros Forjados vende un producto de acero corrugado a Fabricaciones Modelo, y compite para hacer estas ventas con otros proveedores. El vicepresidente de ventas de Aceros Forjados cree que reduciendo el precio del producto, se podría asegurar un 40% de incremento en el volumen de unidades vendidas a Fabricaciones Modelo. Como administrador del departamento de costos y análisis, a usted se le ha consultado para que analice la propuesta del vicepresidente, y exponga sus recomendaciones de si ésta es financieramente benéfica. Se le pide que determine específicamente:

a. Ganancia o pérdida neta con base en el precio propuesto.
b. Volumen de ventas de unidades que, bajo el precio propuesto, se requieren para obtener las mismas utilidades de $40,000 que se reciben con el precio y volumen de ventas actuales.

Utilice la siguiente información en su análisis:

	Operaciones actuales	**Propuesta del vicepresidente de ventas**
Precio unitario	$2.50	$2.00
Volumen de ventas	200,000 unidades	280,000 unidades
Costo variable		
Total	$350,000	$490,000
Por unidad	$1.75	$1.75
Costo fojo	$110,000	$110,000
Ganancia	$40,000	?

25. Negocios Suponga que los productos A y B tienen ecuaciones de demanda y oferta que están relacionadas una con otra. Si q_A y q_B son las cantidades producidas y vendidas de A y B, respectivamente, y p_A y p_B sus respectivos precios, las ecuaciones de demanda son

$$q_A = 8 - p_A + p_B$$

y

$$q_B = 26 + p_A - p_B,$$

y las ecuaciones de oferta son

$$q_A = -2 + 5p_A - p_B$$

y

$$q_B = -4 - p_A + 3p_B.$$

Elimine q_A y q_B para obtener los precios de equilibrio.

26. Negocios La ecuación de oferta para un producto es

$$p = 0.3q^2 + 14.6,$$

y la ecuación de demanda es

$$p = \frac{35.2}{1 + 0.3q}.$$

Aquí p representa el precio por unidad en dólares, y q el número de unidades (en miles) por unidad de tiempo. Grafique ambas ecuaciones y a partir de su gráfica determine el precio y la cantidad de equilibrio a un decimal.

27. Negocios Para un fabricante la ecuación de ingreso total es

$$y_{TR} = 20.5\sqrt{q + 4} - 41$$

y la ecuación de costo total es

$$y_{TC} = 0.02q^3 + 10.4,$$

donde q representa (en miles) tanto el número de unidades producidas como el de unidades vendidas. Grafique un diagrama de equilibrio y encuentre la cantidad de equilibrio.

4.7 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 4.1 pendiente de una recta; forma punto-pendiente; forma pendiente-ordenada al origen; ecuación lineal general en x y y; relación lineal

Sección 4.2 ecuación de demanda; curva de demanda; ecuación de oferta; curva de oferta; ecuación lineal

Sección 4.3 función cuadrática; parábola; eje de simetría; vértice

Sección 4.4 sistema de ecuaciones; sistemas equivalentes; eliminación por adición; eliminación por sustitución; parámetro; ecuación lineal general en x, y y z

Sección 4.5 sistema no lineal

Sección 4.6 punto de equilibrio; precio de equilibrio; cantidad de equilibrio; ganancia; costo total; costo fijo; costo variable; punto de equilibrio; cantidad de equilibrio; ingreso de equilibrio

Resumen

La orientación de una recta no vertical está caracterizada por su pendiente y la recta está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos diferentes sobre la recta. La pendiente de una recta vertical no está definida, y la pendiente de una recta horizontal es cero. Rectas que ascienden tienen pendiente positiva; rectas que descienden tienen pendiente negativa. Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente o son verticales. Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares entre sí, si y sólo si $m_1 = -\frac{1}{m_2}$. Una recta horizontal y una vertical son perpendiculares entre sí.

Formas básicas de las ecuaciones de rectas son las siguientes:

$y - y_1 = m(x - x_1)$	(forma punto-pendiente)
$y = mx + b$	(forma pendiente-ordenada al origen)
$x = a$	(recta vertical)
$y = b$	(recta horizontal)
$Ax + By + C = 0$	(general)

La función lineal $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$, tiene como gráfica una línea recta.

En economía, las funciones de oferta y demanda tienen la forma $p = f(q)$ y desempeñan un papel importante. Cada una da una correspondencia entre el precio p de un producto, y el número de unidades q del producto que los fabricantes (o consumidores) ofrecerán (o comprarán) a ese precio durante algún periodo.

Una función cuadrática tiene la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0).$$

Su gráfica es una parábola que se abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. El vértice es

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right),$$

y c es la intersección y. El eje de simetría, así como las intersecciones x y y son útiles para hacer el bosquejo de la gráfica.

Un sistema de ecuaciones lineales puede resolverse con los métodos de eliminación por adición y eliminación por sustitución. Una solución puede incluir uno o más parámetros. La sustitución también es útil en la solución de sistemas no lineales.

La solución de un sistema formado por las ecuaciones de oferta y demanda para un producto, da el punto de equilibrio, que indica el precio al que los clientes comprarán la misma cantidad de un producto que los productores desean vender a ese precio.

Las utilidades son el ingreso total menos el costo total, donde el costo total es la suma de los costos fijos y los costos variables. El punto de equilibrio es el punto en donde el ingreso total iguala al costo total.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color se sugiere utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

1. La pendiente de la recta que pasa por $(2, 5)$ y $(3, k)$ es 4. Encuentre k.

2. La pendiente de la recta que pasa por $(2, 3)$ y $(k, 3)$ es 0. Encuentre k.

En los problemas del 3 al 9 determine la forma pendiente-ordenada al origen y una forma general de una ecuación de la recta que tiene las propiedades indicadas.

3. Pasa por $(3, -2)$ y tiene intersección y igual a 1.

4. Pasa por $(-1, -1)$ y es paralela a la recta $y = 3x - 4$.

5. Pasa por $(10, 4)$ y tiene pendiente $\frac{1}{2}$.

6. Pasa por $(3, 5)$ y es vertical.

7. Pasa por $(-2, 4)$ y es horizontal.

8. Pasa por $(1, 2)$ y es perpendicular a la recta $-3y + 5x = 7$.

9. Tiene intersección y igual a 2 y es perpendicular a $y + 3x = 2$.

10. Determine si el punto $(0, -7)$ pertenece a la recta que pasa por $(1, -3)$ y $(4, 9)$.

En los problemas del 11 al 16 determine si las rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de éstas.

11. $x + 4y + 2 = 0, \quad 8x - 2y - 2 = 0.$

12. $y - 2 = 2(x - 1), \quad 2x + 4y - 3 = 0.$

13. $x - 3 = 2(y + 4), \quad y = 4x + 2.$

14. $3x + 5y + 4 = 0, \quad 6x + 10y = 0.$

15. $y = \frac{1}{2}x + 5, \quad 2x = 4y - 3.$

16. $y = 7x, \quad y = 7.$

En los problemas del 17 al 20 escriba cada recta en la forma pendiente-ordenada al origen y haga un bosquejo de su gráfica. ¿Cuál es la pendiente de la recta?

17. $3x - 2y = 4.$

18. $x = -3y + 4.$

19. $4 - 3y = 0.$

20. $y = 2x.$

En los problemas del 21 al 30 grafique cada función. Para las que sean funciones lineales, también obtenga la pendiente y la intersección con el eje vertical. Para las cuadráticas obtenga todas las intersecciones y el vértice.

21. $y = f(x) = 4 - 2x.$

22. $s = g(t) = 8 - 2t - t^2.$

23. $y = f(x) = 9 - x^2.$

24. $y = f(x) = 3x - 7.$

25. $y = h(t) = t^2 - 4t - 5.$

26. $y = h(t) = 1 + 3t.$

27. $p = g(t) = 3t.$

28. $y = F(x) = (2x - 1)^2.$

29. $y = F(x) = -(x^2 + 2x + 3).$

30. $y = f(x) = \dfrac{x}{3} - 2.$

En los problemas del 31 al 44 resuelva el sistema dado.

31. $\begin{cases} 2x - y = 6, \\ 3x + 2y = 5. \end{cases}$

32. $\begin{cases} 8x - 4y = 7, \\ y = 2x - 4. \end{cases}$

33. $\begin{cases} 4x + 5y = 3, \\ 3x + 4y = 2. \end{cases}$

34. $\begin{cases} 3x + 6y = 9, \\ 4x + 8y = 12. \end{cases}$

35. $\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}y = -4, \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = 8. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = \frac{1}{12}, \\ \frac{4}{3}x + 3y = \frac{5}{3}. \end{cases}$

37. $\begin{cases} 3x - 2y + z = -2, \\ 2x + y + z = 1, \\ x + 3y - z = 3. \end{cases}$

38. $\begin{cases} x + \dfrac{2y + x}{6} = 14, \\ y + \dfrac{3x + y}{4} = 20. \end{cases}$

39. $\begin{cases} x^2 - y + 2x = 7, \\ x^2 + y = 5. \end{cases}$

40. $\begin{cases} y = \dfrac{18}{x + 4}, \\ x - y + 7 = 0. \end{cases}$

[8]41. $\begin{cases} x + 2z = -2, \\ x + y + z = 5. \end{cases}$

[8]42. $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - y + z = 0, \\ x + z = 0. \end{cases}$

[8]43. $\begin{cases} x - y - z = 0, \\ 2x - 2y + 3z = 0. \end{cases}$

[8]44. $\begin{cases} 2x - 5y + 6z = 1, \\ 4x - 10y + 12z = 2. \end{cases}$

45. Suponga que a y b están relacionadas de manera lineal, de modo que $a = 1$ cuando $b = 2$, y $a = 2$ cuando $b = 1$. Encuentre una forma lineal general de una ecuación que relacione a y b. También encuentre a cuando $b = 3$.

46. **Temperatura y frecuencia cardiaca** Cuando la temperatura T (en grados Celsius) de un gato se reduce, la frecuencia cardiaca del gato r (en latidos por minuto) disminuye. Bajo condiciones de laboratorio, un gato a una temperatura de 37°C tuvo una frecuencia cardiaca de 220, y a una temperatura de 32°C su frecuencia cardiaca fue de 150. Si r está relacionada linealmente con T, en donde T está entre 26 y 38°C, (a) determine una ecuación para r en términos de T, y (b) determine la frecuencia cardiaca a una temperatura de 28°C.

[8]Se refiere a los conceptos vistos en los ejemplos 6 y 7 de la sección 4.4.

47. Suponga que f es una función lineal tal que $f(1) = 5$, y $f(x)$ disminuye 4 unidades por cada incremento de 3 unidades en x. Encuentre $f(x)$.

48. Si f es una función lineal tal que $f(-1) = 8$ y $f(2) = 5$, encuentre $f(x)$.

49. Ingreso máximo La función de demanda para el fabricante de un producto es $p = f(q) = 200 - 2q$, donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando se demandan q unidades. Determine el nivel de producción que maximiza el ingreso total del fabricante y calcule este ingreso.

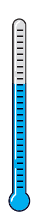
50. Impuesto sobre ventas La diferencia en el precio de dos artículos antes de que un impuesto sobre la venta de 5% se les imponga es de \$4. La diferencia en el precio después del impuesto es de \$4.20. Encuentre el precio de cada artículo antes del impuesto.

51. Precio de equilibrio Si las ecuaciones de oferta y demanda de cierto producto son $125p - q - 250 = 0$ y $100p + q - 1100 = 0$, respectivamente, encuentre el precio de equilibrio.

52. Psicología En psicología el término *memoria semántica* se refiere al conocimiento del significado y la relación de las palabras, así como al significado con el que almacenamos y recuperamos tal información.[9] En un modelo de red de memoria semántica, hay una jerarquía de niveles en los que se almacena la información. En un experimento de Collins y Quillian basado en un modelo de red, los datos se obtuvieron sobre el tiempo de reacción para responder a preguntas sencillas acerca de sustantivos. La gráfica de los resultados muestra que en promedio, el tiempo de reacción R (en milisegundos) es una función lineal del nivel L en el que una propiedad característica del sustantivo es almacenada. En el nivel 0 el tiempo de reacción es de 1310; en el nivel 2 el tiempo de reacción es de 1460. (a) Encuentre la función lineal. (b) Encuentre el tiempo de reacción en el nivel 1. (c) Encuentre la pendiente y determine su significado.

53. Punto de equilibrio Un fabricante de cierto producto vende todo lo que produce. Determine el punto de equilibrio, si el producto se vende en \$16 por unidad, el costo fijo es \$10,000 y el costo variable está dado por $y_{VC} = 8q$, en donde q es el número de unidades producidas (y_{VC} se expresa en dólares).

54. Conversión de temperatura La temperatura Celsius, C, es una función lineal de la temperatura Fahrenheit, F. Utilice el hecho de que 32°F es lo mismo que 0°C y que 212°F es lo mismo que 100°C para hallar esta función. También encuentre C cuando $F = 50$.



55. Contaminación En una provincia de una nación desarrollada, la contaminación del agua se analiza utilizando un modelo de oferta-demanda. La *ecuación de oferta ambiental* $L = 0.0183 - \dfrac{0.0042}{p}$ describe el gravamen por tonelada, L (en dólares), como una función de la contaminación total, p (en toneladas por kilómetro cuadrado), para $p \geq 0.2295$. La *ecuación de demanda ambiental*, $L = 0.0005 + \dfrac{0.0378}{p}$, describe el costo por tonelada de disminución, como una función de la contaminación total para $p > 0$. Determine el nivel de equilibrio de la contaminación total a dos decimales.[10]

56. 56. Resuelva en forma gráfica el sistema lineal

$$\begin{cases} 3x + 4y = 20, \\ 7x + 5y = 64. \end{cases}$$

57. Por medio de una gráfica, resuelva el sistema lineal

$$\begin{cases} 0.2x + 0.3y = 7, \\ 0.3x + 0.5y = 4. \end{cases}$$

Redondee x y y a dos decimales.

58. Mediante una gráfica, resuelva el sistema no lineal

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{x}, \text{ donde } x > 0, \\ y = x^2 - 6. \end{cases}$$

Redondee x y y a dos decimales.

59. Resuelva gráficamente el sistema no lineal

$$\begin{cases} y = x^3 + 1, \\ y = 2 - x^2. \end{cases}$$

Redondee x y y a dos decimales.

60. Resuelva en forma gráfica la ecuación

$$x^2 + 4 = x^3 - 3x$$

tratándola como un sistema. Redondee x a dos decimales.

[9] G. R. Loftus y E. F. Loftus, *Human Memory: The Processing of Information* (Nueva York: Laurence Erlbaum Associates, Inc., distribuido por Halsted Press, División de John Wiley and Sons, Inc., 1976).

[10] Véase Hua Wang y David Wheeler, "Pricing Industrial Pollution in China: An Economic Analysis of the Levy System", World Bank Policy Research Working Paper #1644, septiembre de 1996.

Aplicación práctica

Planes de cobro en telefonía celular

Planes de cobro en telefonía celular. En décadas recientes, los cambios en la tecnología y la ley han transformado la industria de la comunicación. Algunos de los cambios han tenidos sus pros y sus contras. Por ejemplo, considere el problema de elegir un plan de telefonía celular. En la mayoría de las áreas urbanas, los usuarios de teléfonos celulares, literalmente tienen docenas de planes para elegir. Los planes incluyen tarifas de accesos mensuales, minutos libres, cobros por tiempo aire adicional, tarifas por *roaming* regional, tarifa por *roaming* nacional, tarifas por horas pico y horas no pico, y tarifas por larga distancia (sin mencionar costos por activación, gastos por cancelación y cosas por el estilo). Dados todos estos factores, ¿cómo puede un consumidor hacer una elección inteligente?

Aunque encontramos que la mejor elección garantizada requiere de un arduo trabajo, realizar una elección razonable sólo requiere de pocas matemáticas. Considere los planes ofrecidos por una sola compañía de telecomunicaciones, denominada Compañía XY&Z, y suponga que la mayor parte de las llamadas son locales, hechas (o recibidas) en la ciudad durante las horas pico. En otras palabras, ignoraremos las cuotas por *roaming*, tasas en horas no pico y tarifas de larga distancia. En diciembre de 2000, esta compañía ofreció los planes siguientes:

Básico: $19.99 mensual compra 60 minutos. El tiempo adicional cuesta $0.40 por minuto.

Advantage I: $29.99 mensual compra 120 minutos. El tiempo adicional cuesta $0.30 por minuto.

Advantage II: $39.99 mensual compra 200 minutos. El tiempo adicional cuesta $0.30 por minuto.

Advantage III: $49.99 mensual compra 400 minutos. El tiempo adicional cuesta $0.30 por minuto.

Premier: $59.99 mensual compra 450 minutos. El tiempo adicional cuesta $0.35 por minuto.

Para representar en forma matemática estos planes, tenemos que escribir el costo mensual total como una función del tiempo para cada plan. Para el plan Básico, el costo mensual, B, dependerá del número total de llamadas de acuerdo con la función

$$B(t) = \begin{cases} 19.99 & \text{si } t \leq 60, \\ 19.99 + 0.40(t - 60) & \text{si } t > 60. \end{cases}$$

De manera similar, representamos los tres planes Advantage con $A1$, $A2$ y $A3$, respectivamente, y el plan Premier por P, así, tenemos estas funciones:

$$A1(t) = \begin{cases} 29.99 & \text{si } t \leq 120, \\ 29.99 + 0.30(t - 120) & \text{si } t > 120. \end{cases}$$

$$A2(t) = \begin{cases} 39.99 & \text{si } t \leq 200, \\ 39.99 + 0.30(t - 200) & \text{si } t > 200. \end{cases}$$

$$A3(t) = \begin{cases} 49.99 & \text{si } t \leq 400, \\ 49.99 + 0.30(t - 400) & \text{si } t > 400. \end{cases}$$

$$P(t) = \begin{cases} 59.99 & \text{si } t \leq 450, \\ 59.99 + 0.35(t - 450) & \text{si } t > 450. \end{cases}$$

Con toda esta vasta información, es recomendable construir una gráfica para tener una perspectiva general del problema. Podríamos realizar esto en forma manual, pero aquí está una buena oportunidad para utilizar la capacidad de una calculadora gráfica. Introducimos la función $B(t)$ como

$$\text{Y1} = 19.99 + 0.40(\text{X} - 60)(\text{X} > 60).$$

El símbolo $>$ viene en el menú TEST, y la expresión $(\text{X} > 60)$ es igual a 1 o 0, dependiendo si x es, o no, mayor que 60. Introduciendo las otras cuatro funciones de manera similar y graficándolas juntas, obtenemos la pantalla que se muestra en la figura 4.49.

Cuál plan es mejor depende de la cantidad de tiempo de llamadas, para cualquier tiempo aire mensual dado, el mejor plan es aquél en que la gráfica es la más baja en ese punto.

Para un tiempo muy breve de llamadas, el plan Básico es mejor, pero en algún punto se vuelve más caro que el plan Advantage I. Encontramos en dónde ocurre esto —el valor de t en el que las gráficas de esos dos planes se intersecan. Obsérvese que si no hubiésemos graficado todas las funciones, no sabríamos qué

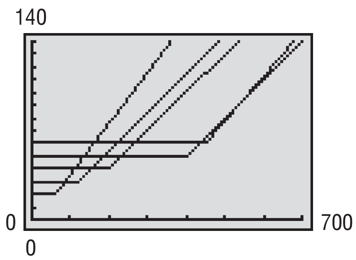


FIGURA 4.49 Costos de los diferentes planes.

parte de cada definición de función utilizar; tal como están las cosas, podemos ver que utilizamos la segunda parte de la definición de $B(t)$ (la parte cuya gráfica es inclinada), y la primera parte de la definición de $A1(t)$ (la parte cuya gráfica es plana). En otras palabras, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} B(t) = 19.99 + 0.40(t - 60), \\ A1(t) = 29.99. \\ B(t) = A1(t), \end{cases}$$

Por medio de sustitución, esto se simplifica a una sola ecuación que se resuelve rápidamente:

$$\begin{aligned} 19.99 + 0.40(t - 60) &= 29.99, \\ 0.40t - 24 &= 10, \\ 0.40t &= 34, \\ t &= 85. \end{aligned}$$

De modo que el plan Advantage I se vuelve mejor que el plan Básico para más de 85 minutos de tiempo mensual de llamadas.

Con base en la gráfica, también podemos ver que en algún punto el plan Advantage II empieza a ser el mejor plan, y que en un punto posterior, a su vez, el plan Advantage III se vuelve mejor. Sin embargo, note algo interesante en los planes Advantage III y Premier: el plan Advantage III es mejor al principio, y luego el plan Premier es mejor por un lapso, pero para tiempos muy altos de uso, el plan Advantage III es nuevamente mejor.[11] Encontramos el último punto de cambio. Es el valor de t en el que las dos partes inclinadas de las gráficas de $A3(t)$ y $P(t)$ se intersecan. En lugar de resolverla en forma algebraica, esta vez utilizamos la calculadora para determinar de manera automática el punto de intersección.

[11]Los planes también difieren de manera significativa en tarifas por roaming regional, pero no estamos considerándolos.

Nuestro resultado se muestra en la fig. 4.50.

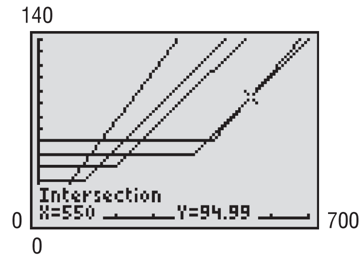


FIGURA 4.50 Planes Advantage III y Premier.

De modo que el plan Advantage III es mejor que el plan Premier para más de 550 minutos de llamadas.

De lo que conocemos hasta ahora, podemos construir la tabla parcial siguiente.

Tiempo aire (min)	Mejor plan
0 a 85	Básico
	Advantage I
	Advantage II
	Advantage III
	Premier
550 y más	Advantage III

La terminación de esta tabla se deja para los ejercicios.

Para buscar planes de servicio de teléfonos celulares en diferentes áreas, visite `www.point.com`.

Ejercicios

1. Copie la tabla anterior en una página aparte. Después utilice las técnicas de solución algebraicas para llenar las dos primeras líneas en blanco de la columna de tiempo aire.
2. Utilice una calculadora gráfica para llenar las dos líneas en blanco restantes.
3. ¿Qué sucede cuando trata de utilizar la calculadora para determinar un punto de intersección, pero no es cuidadoso con su aproximación inicial?
4. ¿Por qué la compañía XY&Z ofrece cinco diferentes planes, en lugar de ofrecer un solo plan que proporcione a la compañía una utilidad para cualquier tiempo aire del consumidor?