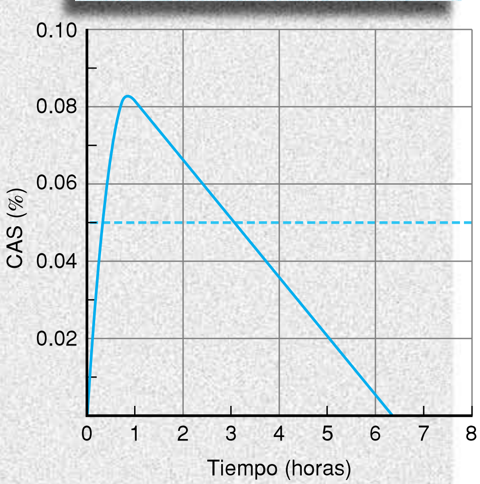
CAPÍTULO 3

Funciones y gráficas

3.1 Funciones
3.2 Funciones especiales
3.3 Combinación de funciones
3.4 Gráficas en coordenadas rectangulares
3.5 Simetría
3.6 Traslaciones y reflexiones
3.7 Repaso

Aplicación práctica
Una experiencia con los impuestos



Supóngase que un hombre de 90 kg bebe cuatro cervezas en rápida sucesión. Sabemos que su concentración de alcohol en la sangre, CAS, primero se eleva y después disminuye en forma paulatina a cero. Pero, ¿cuál es la mejor manera de describir qué tan rápido se eleva la CAS, en dónde alcanza su punto máximo y qué tan rápido disminuye?

Si obtenemos las medidas de los valores de CAS para este bebedor en particular, podemos mostrarlas en una tabla, como sigue:

Tiempo (h)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
CAS (%)	0.0820	0.0668	0.0516	0.0364	0.0212	0.0060

Sin embargo, una tabla sólo puede mostrar un número limitado de valores y en realidad no proporciona la imagen global.

En lugar de lo anterior, podríamos relacionar la CAS con el tiempo t si utilizamos una combinación de ecuaciones lineales y cuadráticas (recuerde el cap. 1):

$$\text{CAS} = -0.1025t^2 + 0.1844t \qquad \text{si } t \leq 0.97,$$

$$\text{CAS} = -0.0152t + 0.0972 \qquad \text{si } t > 0.97.$$

Sin embargo, como con la tabla, es difícil ver las ecuaciones y entender rápidamente lo que sucede con la CAS en el transcurso del tiempo.

Quizá la mejor descripción de cambio en la CAS con el tiempo es una gráfica como la de la izquierda. Aquí, con facilidad vemos qué sucede. La concentración de alcohol en la sangre asciende rápidamente, tiene un máximo de 0.083% después de aproximadamente una hora, y luego disminuye de manera gradual durante las siguientes cinco horas y media. Observe que por más de tres horas la CAS de este bebedor está por arriba de 0.05%, el punto en el que, por lo regular, las habilidades que uno tiene para conducir algún vehículo empiezan a declinar. La curva variará de un bebedor a otro, pero las mujeres por lo común se ven afectadas con mayor severidad que los hombres, no sólo a causa de la diferencia de peso, sino también a consecuencia del diferente contenido de agua entre los cuerpos de ambos sexos.

La relación entre el tiempo y el contenido de alcohol en la sangre, es un ejemplo de una función. Este capítulo trata a fondo las funciones y sus gráficas.

OBJETIVO Entender lo que es una función y determinar dominios y valores de una función.

3.1 Funciones

En el siglo XVII, Gottfried Wilhelm Leibniz, uno de los inventores del cálculo, introdujo el término *función* en el vocabulario matemático. El concepto de función es uno de los más básicos en todas las matemáticas y es esencial para el estudio del cálculo.

En forma breve, una función es un tipo especial de relación que expresa cómo una cantidad (la *salida*) depende de otra cantidad (la *entrada*). Por ejemplo, cuando se invierte dinero a alguna tasa de interés, el interés I (salida) depende del tiempo t (entrada) que el dinero esté invertido. Para expresar esta dependencia, decimos que I es una "función de" t. Las relaciones funcionales como ésta en general se especifican mediante una fórmula que muestra lo que debe hacerse con la entrada para determinar la salida.

Para ejemplificar esto, suponga que \$100 ganan un interés simple a una tasa anual del 6%. Entonces, puede mostrarse que el interés y el tiempo están relacionados por la fórmula

$$I = 100(0.06)t, \tag{1}$$

donde I está en dólares y t en años. Por ejemplo,

$$\text{si } t = \tfrac{1}{2}, \qquad \text{entonces} \qquad I = 100(0.06)(\tfrac{1}{2}) = 3. \tag{2}$$

Así, la fórmula (1) asigna a la entrada $\frac{1}{2}$ la salida 3. Podemos pensar en la fórmula (1) como la definición de una *regla*: multiplicar t por 100(0.06). La regla asigna a cada número de entrada t exactamente un número de salida I, el cual se simboliza mediante la siguiente notación de flecha:

$$t \to I \qquad \text{o} \qquad t \to 100(0.06)t.$$

Esta regla es un ejemplo de una *función* en el siguiente sentido:

Definición

Una ***función*** es una regla que asigna a cada número de entrada exactamente un número de salida. Al conjunto de números de entrada para los cuales se aplica la regla se le llama el ***dominio*** de la función. El conjunto de todos los números de salida se llama el ***rango***.

Para la función del interés definida por la fórmula (1), el número de entrada t no puede ser negativo, ya que el tiempo negativo no tiene sentido. Así, el dominio consiste en todos los números no negativos; esto es, todo $t \geq 0$. De (2) vemos que cuando la entrada es $\frac{1}{2}$, la salida es 3. De modo que 3 está en el rango.

Hasta aquí hemos usado el término *función* en un sentido restringido, ya que en general, las entradas o salidas no tienen por qué ser números. Por ejemplo, una lista de estados y capitales asigna a cada estado su capital (exactamente una salida), de modo que hay una función implicada. Sin embargo, por el momento sólo consideraremos las funciones cuyos dominios y rangos consistan en números reales.

Una variable que representa a los números de entrada para una función se denomina **variable independiente.** Una variable que representa a los números de salida se denomina **variable dependiente,** ya que su valor *depende* del valor de *la variable independiente*. Decimos que la variable dependiente es una *función de la variable independiente*. Esto es, la salida es una función de la entrada. Así, para la fórmula de interés $I = 100(0.06)t$, la variable independiente es t, la dependiente es I, e I es una función de t.

Como otro ejemplo, la ecuación (o fórmula):

$$y = x + 2 \tag{3}$$

define a y como una función de x. La ecuación da la regla: "sumar 2 a x". Esta regla asigna a cada entrada x exactamente una salida $x + 2$, que es y. Si $x = 1$, entonces $y = 3$; si $x = -4$, entonces $y = -2$. La variable independiente es x y la dependiente y.

En $y^2 = x$, x y y están relacionadas, pero la relación no es una función de x.

No todas las ecuaciones en x y y definen a y como una función de x. Por ejemplo, sea $y^2 = x$. Si x es 9, entonces $y^2 = 9$, de modo que $y = \pm 3$. Por tanto, para la entrada 9 se asigna no uno, sino *dos* números de salida, 3 y -3. Esto viola la definición de una función, de modo que y **no** es una función de x.

Por otra parte, algunas ecuaciones en dos variables definen a cualquiera de las variables como una función de la otra variable. Por ejemplo, si $y = 2x$, entonces para cada entrada x, existe exactamente una salida, $2x$. Por lo que y es función de x. Sin embargo, al despejar x de la ecuación se obtiene $x = y/2$. Para cada entrada y, existe exactamente una salida, $y/2$. En consecuencia, x es una función de y.

En general, las letras f, g, h, F, G, etc., se usan para representar reglas de funciones. Por ejemplo, la ecuación (3), $y = x + 2$, define a y como una función de x, en donde la regla es "sumar 2 a la entrada". Suponga que hacemos que f represente esta regla. Entonces decimos que f es la función. Para indicar que f asigna a la entrada 1 la salida 3, escribimos $f(1) = 3$, que se lee "f de 1 es igual a 3". En forma análoga, $f(-4) = -2$. En términos generales, si x es cualquier entrada tenemos la notación:

$f(x)$ es un número de salida.

$f(x)$, que se lee "f de x", representa el número de salida en el rango de f que corresponde al número de entrada x en el dominio.

$$\overset{\substack{\text{entrada}\\ \downarrow}}{\underbrace{f(x)}_{\substack{\uparrow\\ \text{salida}}}}$$

Así el resultado $f(x)$ es lo mismo que y. Pero como $y = x + 2$, podemos escribir $y = f(x) = x + 2$ o simplemente

$$f(x) = x + 2.$$

Por ejemplo, para encontrar $f(3)$, que es la salida correspondiente a la entrada 3, reemplazamos con 3 cada x en $f(x) = x + 2$:

$$f(3) = 3 + 2 = 5.$$

Del mismo modo,

$$f(8) = 8 + 2 = 10,$$
$$f(-4) = -4 + 2 = -2.$$

Los números de salida como $f(-4)$ se llaman **valores de la función** (o valores funcionales). Tenga en mente que están en el rango de f.

Advertencia $f(x)$ **no** significa f veces x, $f(x)$ es la salida que corresponde a la entrada x.

La notación funcional es muy utilizada en cálculo.

Con mucha frecuencia, las funciones se definen por medio de la "notación funcional". Por ejemplo, la ecuación $g(x) = x^3 + x^2$, define a la función g que asigna a cada número de entrada x el número de salida $x^3 + x^2$:

$$g\colon\ x \to x^3 + x^2.$$

En otras palabras, g suma el cubo y el cuadrado de un número de entrada. Algunos valores de la función son:

$$g(2) = 2^3 + 2^2 = 12,$$
$$g(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0,$$
$$g(t) = t^3 + t^2,$$
$$g(x + 1) = (x + 1)^3 + (x + 1)^2.$$

La idea de *reemplazo* es muy importante en la determinación de los valores funcionales.

Observe que $g(x + 1)$ se encontró al reemplazar cada x en $x^3 + x^2$ por la entrada $x + 1$.

Cuando hagamos referencia a la función g definida por $g(x) = x^3 + x^2$, con toda libertad llamaremos a la ecuación "función". Así, hablamos de "la función $g(x) = x^3 + x^2$", y de manera análoga, "la función $y = x + 2$".

Seamos más específicos acerca del dominio de una función. A menos que se establezca otra cosa, el dominio consiste en todos los números reales para los cuales la regla de la función tenga sentido, esto es, la regla proporciona valores funcionales que sean números reales.

Por ejemplo, suponga

$$h(x) = \frac{1}{x - 6}.$$

Aquí cualquier número real puede usarse para x, excepto 6, ya que el denominador es cero cuando x es 6. Por tanto, el dominio de h se entenderá que es todos los números reales excepto 6.

■ *Principios en práctica 1*
Determinación de dominios

El área de un círculo depende de la longitud del radio del círculo.

a. Escriba una función $a(r)$ para el área de un círculo cuando la longitud del radio es r.
b. ¿Cuál es el dominio de esta función, sin tomar en cuenta el contexto?
c. ¿Cuál es el dominio de esta función, tomando en cuenta el contexto?

EJEMPLO 1 Determinación de dominios

Encontrar el dominio de cada función.

a. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}.$

Solución: no podemos dividir entre cero, así que debemos encontrar todos los valores de x que hacen que el denominador sea cero. Éstos *no pueden* ser números de entrada. Entonces igualamos el denominador a cero y resolvemos para x.

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 && \text{(ecuación cuadrática),} \\ (x - 2)(x + 1) &= 0 && \text{(factorizando),} \\ x &= 2, -1. \end{aligned}$$

Por consiguiente, el dominio de f son todos los números reales *excepto* 2 y -1.

b. $g(t) = \sqrt{2t - 1}.$

Solución: $\sqrt{2t - 1}$ es un número real si $2t - 1$ es mayor o igual a cero. Si $2t - 1$ es negativo, entonces $\sqrt{2t - 1}$ no es un número real (*es un número imaginario*). Ya que los valores de la función deben ser números reales, debemos suponer que:

$$\begin{aligned} 2t - 1 &\geq 0, \\ 2t &\geq 1 && \text{(sumando 1 a ambos miembros),} \\ t &\geq \frac{1}{2} && \text{(dividiendo ambos miembros entre 2).} \end{aligned}$$

Por tanto, el dominio es el intervalo $[\frac{1}{2}, \infty)$.

■

Principios en práctica 2

Determinación del dominio y de los valores funcionales

El tiempo que toma recorrer una distancia dada depende de la rapidez a la cual se haga el recorrido.

a. Escriba una función $t(r)$ para el tiempo que toma, si la distancia es 300 millas y la rapidez es r.

b. ¿Cuál es el dominio de esta función, sin tomar en cuenta el contexto?

c. ¿Cuál es el dominio de esta función en el contexto dado?

d. Determine $t(x), t\left(\frac{x}{2}\right)$, y $t\left(\frac{x}{4}\right)$.

e. ¿Qué le sucede al tiempo, si la rapidez se reduce (divide) por una constante c? Describa esta situación utilizando una ecuación.

EJEMPLO 2 Determinación del dominio y de los valores funcionales

Sea $g(x) = 3x^2 - x + 5$. Cualquier número real puede utilizarse como x, de modo que el dominio de g son todos los números reales.

a. *Encontrar* $g(z)$.

Solución: al reemplazar cada x por z en $g(x) = 3x^2 - x + 5$ se obtiene

$$g(z) = 3(z)^2 - z + 5 = 3z^2 - z + 5.$$

b. *Encontrar* $g(r^2)$.

Solución: al reemplazar cada x por r^2 *en* $g(x) = 3x^2 - x + 5$ se obtiene

$$g(r^2) = 3(r^2)^2 - r^2 + 5 = 3r^4 - r^2 + 5.$$

c. *Encontrar* $g(x + h)$.

Solución:

$$\begin{aligned} g(x+h) &= 3(x+h)^2 - (x+h) + 5 \\ &= 3(x^2 + 2hx + h^2) - x - h + 5 \\ &= 3x^2 + 6hx + 3h^2 - x - h + 5. \end{aligned}$$

Advertencia No confunda la notación. En el ejemplo 2(c), encontramos $g(x + h)$ al reemplazar cada x en $g(x) = 3x^2 - x + 5$ por la entrada $x + h$. **No** escriba la función y luego sume h. Esto es, $g(x + h) \neq g(x) + h$:

$$g(x+h) \neq 3x^2 - x + 5 + h.$$

Tampoco utilice la ley distributiva en $g(x + h)$, esto **no** representa una multiplicación. Esto es,

$$g(x+h) \neq g(x) + g(h).$$

EJEMPLO 3 Determinación de un cociente de diferencia

Si $f(x) = x^2$, *determinar* $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

El cociente de diferencia de una función es un importante concepto matemático.

Solución: la expresión $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ se conoce como un **cociente de diferencia.** Aquí el numerador es una diferencia de valores funcionales. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} \\ &= \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h. \end{aligned}$$

En algunos casos, el dominio de una función está restringido por razones físicas o económicas. Por ejemplo, en la función de interés vista anteriormente, $I = 100(0.06)t$ tiene $t \geq 0$, ya que t representa el tiempo. El ejemplo 4 da otra ilustración.

Principios en práctica 3
Función de demanda

Supóngase que la función de demanda semanal para pizzas grandes en una pizzería es

$p = 26 - \frac{q}{40}$.

a. Si el precio actual es \$18.50 por pizza, ¿cuántas pizzas se venden por semana?

b. Si se venden 200 pizzas cada semana, ¿cuál es el precio actual?

c. Si el propietario quiere duplicar el número de pizzas grandes vendidas por semana (a 400), ¿cuál debe ser su precio?

EJEMPLO 4 Función de demanda

Suponga que la ecuación $p = 100/q$ describe la relación entre el precio por unidad p de cierto producto, y el número de unidades q del producto que los consumidores comprarán (demanda) por semana a ese precio. Esta ecuación se llama *ecuación de demanda* para el producto. Si q es un número de entrada, entonces para cada valor de q se asigna exactamente un número de salida p:

$$q \to \frac{100}{q} = p.$$

Por ejemplo,

$$20 \to \frac{100}{20} = 5;$$

esto es, cuando q es 20, entonces p es 5. Así, el precio p es una función de la cantidad demandada, q. Esta función se llama **función de demanda.** La variable independiente es q, y p es la variable dependiente. Ya que q no puede ser cero (la división entre cero no está definida) y no puede ser negativa (q representa una cantidad), el dominio son todos los valores de q tales que $q > 0$.

Hemos visto que una función es en esencia una *correspondencia* por la que a cada número de entrada en el dominio, se asigna un número de salida en el rango. Para la correspondencia dada por $f(x) = x^2$, algunos ejemplos de asignaciones se muestran por medio de flechas en la figura 3.1. El ejemplo siguiente muestra una correspondencia funcional que no está dada por medio de una fórmula algebraica.

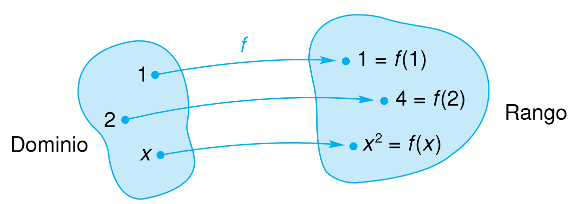


FIGURA 3.1 Correspondencia funcional para $f(x) = x^2$.

PROGRAMACIÓN DE OFERTA

p Precio por unidad en dólares	q Cantidad ofrecida por semana
500	11
600	14
700	17
800	20

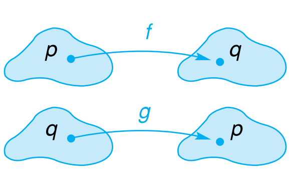


FIGURA 3.2 Programación de oferta y funciones de oferta.

EJEMPLO 5 Programa de oferta

La tabla de la figura 3.2 es un *programa de oferta*. Da una correspondencia entre el precio p de cierto producto y la cantidad q que los fabricantes proporcionan por semana a ese precio. A cada precio le corresponde exactamente una cantidad y viceversa.

Si p es la variable independiente, entonces q es una función de p, digamos $q = f(p)$, y

$$f(500) = 11, \quad f(600) = 14, \quad f(700) = 17, \quad \text{y} \quad f(800) = 20.$$

Observe que cuando el precio por unidad se incrementa, los fabricantes están dispuestos a surtir más unidades por semana.

Por otra parte, si q es la variable independiente, entonces p es una función de q, digamos $p = g(q)$, y

$$g(11) = 500, \quad g(14) = 600, \quad g(17) = 700, \quad \text{y} \quad g(20) = 800.$$

Hablamos de f y g como **funciones de oferta.**

Tecnología

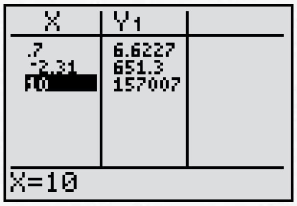


FIGURA 3.3 Tabla de valores funcionales de $f(x) = 17x^4 - 13x^3 + 7$.

Los valores de una función se calculan fácilmente con una calculadora gráfica. Por ejemplo, suponga que:

$$f(x) = 17x^4 - 13x^3 + 7,$$

y que deseamos encontrar $f(0.7)$, $f(-2.31)$ y $f(10)$. Con una calculadora TI-83, primero introducimos la función como Y_1:

$$Y_1 = 17X\text{^}4 - 13X\text{^}3 + 7.$$

Después presionamos la tecla *TABLE* y de manera sucesiva introducimos los valores para x .7, -2.31 y 10. Los resultados se muestran en la figura 3.3. Hacemos notar que existen otros métodos para determinar los valores funcionales por medio de la TI-83.

Ejercicio 3.1

En los problemas del 1 al 12 obtenga el dominio de cada función.

1. $f(x) = \dfrac{8}{x}$. **2.** $g(x) = \dfrac{x}{5}$. **3.** $h(x) = \sqrt{x-3}$. **4.** $H(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}}$.

5. $F(t) = 4t^2 - 6$. **6.** $H(x) = \dfrac{x}{x+8}$. **7.** $f(x) = \dfrac{9x-9}{2x+7}$. **8.** $g(x) = \sqrt{4x+3}$.

9. $G(y) = \dfrac{4}{y^2 - y}$. **10.** $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+6x+5}$. **11.** $h(s) = \dfrac{4-s^2}{2s^2-7s-4}$. **12.** $G(r) = \dfrac{2}{r^2+1}$.

En los problemas del 13 al 24 determine los valores de la función para cada una de las funciones.

13. $f(x) = 2x + 1$; $f(0), f(3), f(-4)$.

14. $H(s) = 5s^2 - 3$; $H(4), H(\sqrt{2}), H(\frac{2}{3})$.

15. $G(x) = 2 - x^2$; $G(-8), G(u), G(u^2)$.

16. $f(x) = 7x$; $f(s), f(t+1), f(x+3)$.

17. $g(u) = u^2 + u$; $g(-2), g(2v), g(-x^2)$.

18. $h(v) = \dfrac{1}{\sqrt{v}}$; $h(16), h\left(\dfrac{1}{4}\right), h(1-x)$.

19. $f(x) = x^2 + 2x + 1$; $f(1), f(-1), f(x+h)$.

20. $H(x) = (x+4)^2$; $H(0), H(2), H(t-4)$.

21. $g(x) = \dfrac{x-4}{x^2+5}$; $g(5), g(3x), g(x+h)$.

22. $H(x) = \sqrt{4+x}$; $H(-4), H(-3), H(x+1) - H(x)$.

23. $f(x) = x^{4/3}$; $f(0), f(64), f(\frac{1}{8})$.

24. $g(x) = x^{2/5}$; $g(32), g(-64), g(t^{10})$.

En los problemas del 25 al 32 determine (a) $f(x+h)$ y (b) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$; simplifique sus respuestas.

25. $f(x) = 4x - 5$. **26.** $f(x) = \dfrac{x}{2}$. **27.** $f(x) = x^2 + 2x$. **28.** $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$.

29. $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$. **30.** $f(x) = x^3$. **31.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$. **32.** $f(x) = \dfrac{x+8}{x}$.

33. Si $f(x) = 9x + 7$, determine $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$.

34. Si $f(x) = x^2 - x$, determine $\dfrac{f(x) - f(4)}{x-4}$.

En los problemas del 35 al 38, ¿es y una función de x? ¿Es x una función de y?

35. $9y - 3x - 4 = 0$. **36.** $x^2 + y = 0$. **37.** $y = 7x^2$. **38.** $x^2 + y^2 = 1$.

39. La fórmula para el área de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$. ¿Es el área una función del radio?

40. Suponga que $f(b) = ab^2 + a^2b$. (a) Determine $f(a)$. (b) Determine $f(ab)$.

41. Valor de un negocio Un negocio con un capital original de \$20,000 tiene ingresos y gastos semanales de \$4000 y \$3200, respectivamente. Si todas las utilidades se conservan en el negocio, exprese el valor V del negocio al final de t semanas como una función de t.

42. Depreciación Si una máquina de \$30,000 se deprecia en un 2% de su valor original cada año, determine una función f que exprese el valor, V, de la máquina después que han transcurrido t años.

43. Función de utilidad Cuando se venden q unidades de cierto producto (q es no negativa), la utilidad P está dada por la ecuación $P = 1.25q$. *¿Es P* una función de q? ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?

44. Función de demanda Supóngase que la función de demanda anual para que un actor particular estelarice una película es $p = \dfrac{1{,}200{,}000}{q}$, en donde q es el número de películas que él estelariza durante el año. Si el actor actualmente cobra \$600,000 por película, ¿cuántas películas estelariza cada año? Si quiere estelarizar cuatro películas por año, ¿cuánto cobrará por esto?

45. Función de oferta Supóngase que la función de oferta semanal por una libra de su café casero en un local de venta de café es $p = \dfrac{q}{50}$, en donde q es el número de libras de café que se ofrecen por semana. ¿Cuántas libras de café a la semana deben ofrecerse si el precio es de \$8.00 por libra? ¿Cuántas libras de café a la semana deben ofrecerse si el precio es de \$20.00 por libra? ¿Cómo cambia la cantidad ofrecida conforme el precio se incrementa?

46. Altas del hospital Una compañía de seguros examinó el registro de un grupo de individuos hospitalizados por una enfermedad en particular. Se encontró que la proporción total de quienes habían sido dados de alta al final de t días de hospitalización está dada por

$$f(t) = 1 - \left(\frac{300}{300 + t}\right)^3.$$

Evalúe (a) $f(0)$, (b) $f(100)$ y (c) $f(300)$. (d) ¿Al final de cuántos días se habrá dado de alta al 99.9% (0.999) del grupo?

47. Psicología Se llevó a cabo un experimento para analizar la respuesta humana a descargas eléctricas.[1] Los sujetos recibieron una descarga de cierta intensidad. Se les pidió asignar una magnitud de 10 a esta descarga en particular, llamada estímulo estándar. Después se les aplicaron otras descargas (estímulos) de varias intensidades. Para cada una de éstas la respuesta R era un número que indicaba la magnitud percibida de la descarga en relación con aquélla del estímulo estándar. Se encontró que R era una función de la intensidad I de la descarga (*I en microamperes*) y se estimó por

$$R = f(I) = \frac{I^{4/3}}{2500}, \qquad 500 \le I \le 3500.$$

Evalúe (a) $f(1000)$ y (b) $f(2000)$. (c) Suponga que I_0 y $2I_0$ están en el dominio de f. Exprese $f(2I_0)$ en términos de $f(I_o)$. ¿Qué efecto sobre la respuesta tiene el duplicar la intensidad?

48. Psicología En un experimento de aprendizaje por asociación de parejas,[2] la probabilidad de una respuesta correcta como función del número n de intentos tiene la forma

$$P(n) = 1 - \frac{1}{2}(1 - c)^{n-1}, \qquad n \ge 1,$$

donde el valor estimado de c es 0.344. Usando este valor de c, determine $P(1)$ y $P(2)$.

49. Programa de oferta La tabla siguiente se conoce como un *programa de oferta*. Dicha tabla proporciona una correspondencia entre el precio p de un producto y la cantidad q que los consumidores demandarán (esto es, comprarán) a ese precio. (a) Si $p = f(q)$, liste los números en el dominio de f. Determine $f(2900)$ y $f(3000)$. (b) Si $q = g(p)$, liste los números en el dominio de g. Determine $g(10)$ y $g(17)$.

Precio por unidad, p	**Cantidad demandada por semana, q**
\$10	3000
12	2900
17	2300
20	2000

En los problemas del 50 al 53 utilice su calculadora para determinar los valores funcionales indicados para la función dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

50. $f(x) = 2.03x^3 - 5.27x^2 - 13.71$; (a) $f(1.73)$, (b) $f(-5.78)$, (c) $f(\sqrt{2})$.

51. $f(x) = \dfrac{14.7x^2 - 3.95x - 15.76}{24.3 - x^3}$; (a) $f(4)$, (b) $f(-17/4)$, (c) $f(\pi)$.

52. $f(x) = (20 - 3x)(2.25x^2 - 7.1x - 16)^4$; (a) $f(0.1)$, (b) $f(-0.01)$, (c) $f(1.6)$.

53. $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}x^2 + 47.62(x + 1)}{9.07}}$; (a) $f(15.93)$, (b) $f(-146)$, (c) $f(0)$.

[1] Adaptado de H. Babkoff, "Magnitude Estimation of Short Electrocutaneous Pulses", *Psychological Research*, 39, núm. 1 (1976), 39-49.

[2] D. Laming, *Mathematical Psychology* (Nueva York: Academic Press, 1983).

OBJETIVO Introducir los conceptos de función constante, función polinomial, función racional, función definida por partes, función valor absoluto y notación factorial.

3.2 FUNCIONES ESPECIALES

En esta sección veremos funciones que tienen formas y representaciones especiales. Empezamos con el que tal vez sea el tipo más sencillo de función que existe: una *función constante*.

> ***Principios en práctica 1***
> **Función constante**
>
> Supóngase que las primas mensuales del seguro de salud para un individuo son de \$125.00.
>
> a. Escriba las primas mensuales del seguro de salud como una función del número de visitas que el individuo hace al doctor.
> b. ¿Cómo cambian las primas del seguro de salud conforme aumenta el número de visitas al doctor?
> c. ¿Qué clase de función es ésta?

EJEMPLO 1 Función constante

Sea $h(x) = 2$. El dominio de h son todos los números reales. Todos los valores funcionales son 2. Por ejemplo,

$$h(10) = 2, \qquad h(-387) = 2, \qquad h(x+3) = 2.$$

Llamamos a h una *función constante* ya que todos los valores de la función son iguales. En forma más general, tenemos esta definición:

> Una función de la forma $h(x) = c$, en donde c es una *constante*, se llama **función constante.**

Una función constante pertenece a una clase más amplia de funciones llamadas *funciones polinomiales*. En general, una función de la forma

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

en donde n es un entero no negativo y $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0$ son constantes con $c_n \neq 0$ se llama **función polinomial** (en x). El número n se llama el **grado** del polinomio, y c_n *es el* **coeficiente principal**. Así,

Cada término en una función polinomial es una constante o bien una constante por una potencia entera positiva de x.

$$f(x) = 3x^2 - 8x + 9$$

es una función polinomial de grado 2 con coeficiente principal 3. Del mismo modo, $g(x) = 4 - 2x$ tiene grado 1 y coeficiente principal -2. Las funciones polinomiales de grado 1 o 2 son llamadas **funciones lineales** o **cuadráticas,** respectivamente. De aquí que, $g(x) = 4 - 2x$ es lineal y $f(x) = 3x^2 - 8x + 9$ es cuadrática. Observe que una función constante distinta de cero, tal como $f(x) = 5$ [la cual puede escribirse como $f(x) = 5x^0$], es una función polinomial de grado cero. La función constante $f(x) = 0$ también se considera una función polinomial, pero no tiene asignado algún grado. El dominio de cualquier función polinomial son todos los números reales.

> ***Principios en práctica 2***
> **Funciones polinomiales**
>
> La función $d(t) = 3t^2$ representa la distancia en metros que un automóvil viajará en t segundos, cuando tiene una aceleración constante de 6 m/s^2.
>
> a. ¿Qué clase de función es ésta?
> b. ¿De qué grado es?
> c. ¿Cuál es su coeficiente principal?

EJEMPLO 2 Funciones polinomiales

a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$ es una función polinomial de grado 3 con coeficiente principal l.

b. $g(x) = \dfrac{2x}{3}$ es una función lineal con coeficiente principal $\dfrac{2}{3}$.

c. $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ *no* es una función polinomial. Puesto que $f(x) = 2x^{-3}$ y el ex-

p o -

nente para x no es un entero no negativo, esta función no tiene la forma propia de las polinomiales. En forma similar, $g(x) = \sqrt{x}$ no es función polinomial porque $g(x) = x^{1/2}$.

Una función que es un cociente de funciones polinomiales se llama **función racional.**

EJEMPLO 3 Funciones racionales

a. $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{x + 5}$ es una función racional, ya que el numerador y el denominador son funciones polinomiales. Observe que esta función racional no está definida para $x = -5$.

b. $g(x) = 2x + 3$ es una función racional, ya que $2x + 3 = \dfrac{2x + 3}{1}$. De hecho, toda función polinomial también es una función racional.

Toda función polinomial es una función racional.

Algunas veces es necesaria más de una expresión para definir una función, como lo muestra el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Función compuesta

Sea

$$F(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } -1 \leq s < 1, \\ 0, & \text{si } 1 \leq s \leq 2, \\ s - 3 & \text{si } 2 < s \leq 8. \end{cases}$$

Ésta se llama **función compuesta,** ya que su regla está dada por más de una expresión. Aquí s es la variable independiente, y el dominio F es toda s tal que $-1 \leq s \leq 8$. El valor de s determina cuál expresión usar.

Determinar $F(0)$: como $-1 \leq 0 < 1$, tenemos $F(0) = 1$.

Determinar $F(2)$: como $1 \leq 2 \leq 2$, tenemos $F(2) = 0$.

Determinar $F(7)$: como $2 < 7 \leq 8$, sustituimos 7 por la s en $s - 3$.

$$F(7) = 7 - 3 = 4.$$

Principios en práctica 3
Función compuesta

Para reducir el inventario, una tienda departamental cobra tres precios. Si compra de cero a cinco pares de medias, el precio es de \$3.50 por par. Si compra de 6 a 10 pares de medias, el precio es \$3.00 por par. Si compra más de 10 pares, el precio es de \$2.75 por par. Escriba una función definida por partes para representar el costo de compra de n pares de medias.

Tecnología

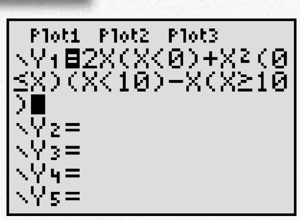


FIGURA 3.4 Introducción de una función definida por partes.

Para ilustrar cómo introducir una función definida por partes en una calculadora TI-83, la figura 3.4 muestra la secuencia de pasos que introducen la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 0, \\ x^2, & \text{si } 0 \leq x < 10, \\ -x, & \text{si } x \geq 10. \end{cases}$$

EJEMPLO 5 Función valor absoluto

La función $f(x) = |x|$ es la *función valor absoluto*. Recuerde que el **valor absoluto** o **magnitud,** de un número real x se denota por $|x|$ y se define por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La función valor absoluto puede considerarse una función definida por partes.

Por eso el dominio de f son todos los números reales. Algunos valores funcionales son

$$f(16) = |16| = 16,$$
$$f(-\tfrac{4}{3}) = |-\tfrac{4}{3}| = -(-\tfrac{4}{3}) = \tfrac{4}{3},$$
$$f(0) = |0| = 0.$$

En los ejemplos siguientes hacemos uso de la *notación factorial*.

El símbolo $r!$, r es un entero positivo, se lee "***r* factorial**". Representa el producto de los primeros r enteros positivos:

$$r! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r.$$

Definimos 0! como 1.

Principios en práctica 4
Factoriales

Siete libros diferentes se colocarán en una repisa. ¿De cuántas formas pueden acomodarse? Represente la pregunta como un problema de factoriales y dé la solución.

EJEMPLO 6 Factoriales

a. $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$

b. $3!(6 - 5)! = 3! \cdot 1! = (3 \cdot 2 \cdot 1)(1) = (6)(1) = 6.$

c. $\dfrac{4!}{0!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = \dfrac{24}{1} = 24.$

EJEMPLO 7 Genética

Suponga que dos conejillos de Indias negros se reproducen y tienen cinco descendientes. Bajo ciertas condiciones puede mostrarse que la probabilidad P de que exactamente r de los descendientes sean de color café y los otros negros, es una función de r, digamos $P = P(r)$, donde

$$P(r) = \frac{5!\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{5-r}}{r!(5-r)!}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, 5.$$

Los factoriales aparecen con frecuencia en la teoría de probabilidad.

La letra P en $P = P(r)$ se utiliza en dos formas. En el lado derecho P representa la regla de la función. En el izquierdo representa la variable dependiente. El dominio de P son todos los enteros desde 0 hasta 5, inclusive. Determinar la probabilidad de que exactamente tres conejillos de Indias sean de color café.

Solución: queremos encontrar $P(3)$. Tenemos

$$P(3) = \frac{5!\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2}{3!2!} = \frac{120\left(\frac{1}{64}\right)\left(\frac{9}{16}\right)}{6(2)} = \frac{45}{512}.$$

Ejercicio 3.2

En los problemas del 1 al 4 determine si la función dada es una función polinomial.

1. $f(x) = x^2 - x^4 + 4.$ **2.** $f(x) = \dfrac{x^2+7}{3}.$ **3.** $g(x) = \dfrac{3}{x^2+7}.$ **4.** $g(x) = 3^{-2}x^2.$

En los problemas del 5 al 8 determine si la función dada es una función racional.

5. $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^3+4}.$ **6.** $f(x) = \dfrac{3}{2x+1}.$ **7.** $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 5, \\ 4 & \text{si } x \geq 5. \end{cases}$ **8.** $g(x) = 4x^{-4}.$

En los problemas del 9 al 12 determine el dominio de cada función.

9. $H(z) = 16.$ **10.** $f(t) = \pi.$ **11.** $f(x) = \begin{cases} 5x, & \text{si } x > 1, \\ 4, & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$ **12.** $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x = 3, \\ x^2, & \text{si } 1 \leq x < 3. \end{cases}$

En los problemas del 13 al 16 establezca (a) el grado y (b) el coeficiente principal de la función polinomial dada.

13. $F(x) = 7x^3 - 2x^2 + 6.$ **14.** $f(x) = 5x.$ **15.** $f(x) = 2 - 3x^4 + 2x.$ **16.** $f(x) = 9.$

En los problemas del 17 al 22 determine los valores funcionales para cada función.

17. $f(x) = 8;\ f(2), f(t+8), f(-\sqrt{17}).$

18. $g(x) = |x-3|;\ g(10), g(3), g(-3).$

19. $F(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t = 0; \\ -1, & \text{si } t < 0 \end{cases}$

$F(10), F(-\sqrt{3}), F(0), F(-\tfrac{18}{5}).$

20. $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x \geq 0 \\ 3, & \text{si } x < 0 \end{cases};$

$f(3), f(-4), f(0).$

21. $G(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 3 \\ 2 - x^2, & \text{si } x < 3 \end{cases};$

$G(8), G(3), G(-1), G(1).$

22. $h(r) = \begin{cases} 3r - 1, & \text{si } r > 2 \\ r^2 - 4r + 7, & \text{si } r < 2 \end{cases};$

$h(3),\ h(-3),\ h(2).$

En los problemas del 23 al 28 determine el valor de cada expresión.

23. $6!.$ **24.** $0!.$ **25.** $(4-2)!.$

26. $5! \cdot 3!.$ **27.** $\dfrac{5!}{4!}.$ **28.** $\dfrac{8!}{5!(8-5)!}.$

---

29. Viaje en tren Un boleto de viaje redondo en tren a la ciudad cuesta \$4.50. Escriba el costo de un boleto de viaje redondo como función del ingreso del pasajero. ¿Qué clase de función es ésta?

30. Geometría Un prisma rectangular tiene un largo tres veces mayor que su ancho, y altura una unidad menor que el doble del ancho. Escriba el volumen del prisma rectangular como una función del ancho. ¿Qué clase de función es ésta?

31. Función de costo En la fabricación de un componente para una máquina, el costo inicial de un troquel es de \$850 y todos los otros costos adicionales son de \$3 por unidad producida. (a) Exprese el costo total C (en dólares) como una función lineal del número q de unidades producidas. (b) ¿Cuántas unidades se producen si el costo total es de \$1600?

32. Inversión Si un capital de P dólares se invierte a una tasa de interés simple anual r durante t años, exprese la cantidad total acumulada del capital y del interés como una función de t. ¿Su resultado es una función lineal de t?

33. Ventas Para alentar la venta en grupos grandes, un teatro cobra dos precios. Si su grupo es menor de 10, cada boleto cuesta \$8.50. Si su grupo es de 10 o más, cada boleto cuesta \$8.00. Escriba una función definida por partes para representar el costo de comprar n boletos.

34. Factoriales En un parque de diversiones, un grupo de amigos quiere viajar en los troncos en todos los órdenes posibles. ¿Cuántos viajes tiene que hacer un grupo de tres? ¿Cuántos un grupo de cuatro? ¿Un grupo de cinco?

35. Genética Bajo ciertas condiciones, si dos padres con ojos de color café tienen exactamente tres hijos, la probabilidad P de que tengan exactamente r hijos con ojos azules está dada por la función $P = P(r)$, donde

$$P(r) = \frac{3!\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{3-r}}{r!(3-r)!}, \qquad r = 0, 1, 2, 3.$$

Determine la probabilidad de que exactamente dos de los hijos tengan los ojos azules.

36. Genética En el ejemplo 7 determine la probabilidad de que los cinco descendientes tengan ojos de color café.

37. Crecimiento de bacterias En un cultivo están desarrollándose bacterias. El tiempo t (en horas) para que el número de bacterias se duplique (tiempo de generación), es una función de la temperatura T (en °C) del cultivo. Si esta función está dada por[3]

$$t = f(T) = \begin{cases} \frac{1}{24}T + \frac{11}{4}, & \text{si } 30 \le T \le 36, \\ \frac{4}{3}T - \frac{175}{4}, & \text{si } 36 < T \le 39, \end{cases}$$

(a) determine el dominio de f, y (b) encuentre $f(30)$, $f(36)$ y $f(39)$.

En los problemas del 38 al 41 utilice su calculadora para encontrar los valores funcionales indicados para la función dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

38. $f(x) = \begin{cases} 0.08x^5 - 47.98, & \text{si } x \ge 7.98 \\ 0.67x^6 - 37.41, & \text{si } x < 7.98; \end{cases}$

(a) $f(7.98)$, (b) $f(2.26)$, (c) $f(9)$.

39. $f(x) = \begin{cases} 47.1x^5 + 30.4, & \text{si } x > 0 \\ 9.4x^3 - x, & \text{si } x \le 0; \end{cases}$

(a) $f(5.5)$, (b) $f(-3.6)$, (c) $f(6/7)$.

40. $f(x) = \begin{cases} 4.07x - 2.3 & \text{si } x < -8 \\ 19.12, & \text{si } -8 \le x < -2; \\ x^2 - 4x^{-2}, & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$

(a) $f(-5.8)$, (b) $f(-14.9)$, (c) $f(7.6)$

41. $f(x) = \begin{cases} x/(x+3), & \text{si } x < -5 \\ x(x-4)^2, & \text{si } -5 \le x < 0; \\ \sqrt{2.1x + 3}, & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

(a) $f(-\sqrt{30})$, (b) $f(46)$, (c) $f(-2/3)$.

OBJETIVO Combinar funciones por medio de suma, resta, multiplicación, división y composición.

3.3 COMBINACIÓN DE FUNCIONES

Existen diferentes formas de combinar dos funciones para crear una nueva función. Suponga que f y g son las funciones dadas por

$$f(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad g(x) = 3x.$$

Sumando $f(x)$ y $g(x)$ se obtiene

$$f(x) + g(x) = x^2 + 3x.$$

Esta operación define una nueva función llamada *suma* de f y g, que se denota por $f + g$. Su valor funcional en x es $f(x) + g(x)$. Esto es,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x.$$

Por ejemplo,

$$(f + g)(2) = 2^2 + 3(2) = 10.$$

En general, para cualesquiera funciones f y g, definimos la **suma** $\boldsymbol{f + g}$, la **diferencia** $\boldsymbol{f - g}$, el **producto** $\boldsymbol{fg}$ y el ***cociente*** $\boldsymbol{\frac{f}{g}}$ como sigue:[4]

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),$$
$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x),$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

[3]Adaptado de F. K. E. Imrie y A: J. Vlitos, "Production of Fungal Protein from Carob", en *Single-Cell Protein II*, ed. S. R. Tannenbaum y D. I. C. Wang (Cambridge, MA.: MIT Press, 1975).

[4]En cada una de las cuatro combinaciones, se supone que x se encuentra en los dominios tanto de f como de g. En el cociente tampoco se permite cualquier valor de x para el cual $g(x)$ sea cero.

Así, para $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x$, tenemos

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x,$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 3x,$$
$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2(3x) = 3x^3,$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{3x} = \frac{x}{3}, \qquad \text{para } x \neq 0.$$

EJEMPLO 1 Combinación de funciones

Si $f(x) = 3x - 1$ *y* $g(x) = x^2 + 3x$, *encontrar*

a. $(f + g)(x)$,

b. $(f - g)(x)$,

c. $(fg)(x)$,

d. $\frac{f}{g}(x)$.

Solución:

a. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (3x - 1) + (x^2 + 3x) = x^2 + 6x - 1.$

b. $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (3x - 1) - (x^2 + 3x) = -1 - x^2.$

c. $(fg)(x) = f(x)g(x) = (3x - 1)(x^2 + 3x) = 3x^3 + 8x^2 - 3x.$

d. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x - 1}{x^2 + 3x}.$

Composición

También podemos combinar dos funciones aplicando primero una función a un número y después la otra función al resultado. Por ejemplo, suponga que $g(x) = 3x$, $f(x) = x^2$ y $x = 2$. Entonces $g(2) = 3(2) = 6$. Así, g envía la entrada 2 a la salida 6:

$$2 \xrightarrow{g} 6.$$

Después, hacemos que la salida 6 se convierta en la entrada para f:

$$f(6) = 6^2 = 36.$$

De modo que f envía 6 al 36:

$$6 \xrightarrow{f} 36.$$

Aplicando primero g y después f, enviamos el 2 al 36:

$$2 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} 36.$$

De manera más general, reemplacemos el 2 por x, donde x está en el dominio de g (véase la fig. 3.5). Aplicando g a x, obtenemos el número $g(x)$, que debemos suponer está en el dominio de f. Aplicando f a $g(x)$, obtenemos $f(g(x))$, se lee "f de g de x", que está en el rango de f. Esta operación de aplicar g y después aplicar f al resultado define una función llamada "composición" (o función compuesta), la cual se denota por $f \circ g$. Esta función asigna al número de entrada x el número de salida $f(g(x))$. [Véase la flecha inferior en la fig. 3.5.]

De esta manera $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Es válido pensar que $f(g(x))$ es una función de una función.

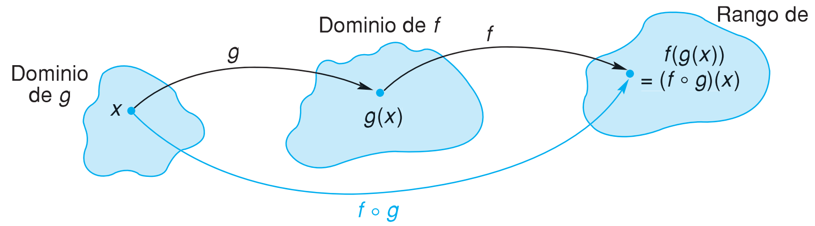


FIGURA 3.5 Composición de f con g.

Definición

Si f y g son funciones, la ***composición de f con g*** es la función $f \circ g$ definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

donde el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g, tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

Para $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x$, podemos obtener una forma sencilla para $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = (3x)^2 = 9x^2.$$

Por ejemplo, $(f \circ g)(2) = 9(2)^2 = 36$, como vimos anteriormente.

> ***Principios en práctica 1***
> **Composición**
>
> Un CD cuesta x dólares por mayoreo. El precio que el almacén paga, está dado por la función $s(x) = x + 3$. El precio que el cliente paga es $c(x) = 2x$, en donde x es el precio que el almacén paga. Escriba una función compuesta para determinar el precio del cliente como una función del precio de mayoreo.

EJEMPLO 2 Composición

Sean $f(x) = \sqrt{x}$ *y* $g(x) = x + 1$. *Encontrar*

a. $(f \circ g)(x)$, **b.** $(g \circ f)(x)$.

Solución:

a. $(f \circ g)(x)$ es $f(g(x))$. Ahora g suma 1 a x, y f saca la raíz cuadrada del resultado. Así que,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = \sqrt{x + 1}.$$

El dominio de g son todos los números reales x y el de f todos los números reales no negativos. De aquí que el dominio de la composición sea todas las x para las que $g(x) = x + 1$ sea no negativa. Esto es, el dominio son todas las $x \geq -1$, o en forma equivalente, el intervalo $[-1, \infty)$.

b. $(g \circ f)(x)$ es $g(f(x))$. Ahora f toma la raíz cuadrada de x y g suma 1 al resultado. De esta manera g suma 1 a la $\sqrt{x}$ y tenemos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1.$$

El dominio de f son todas las $x \geq 0$ y el dominio de g son todos los reales. Por lo que el dominio de la composición son todas las $x \geq 0$, para las cuales $f(x) = \sqrt{x}$ es real, es decir, toda $x \geq 0$.

Advertencia Por lo general, $f \circ g \neq g \circ f$. En el ejemplo 2,

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x + 1},$$

pero tenemos

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x} + 1.$$

Tampoco confunda $f(g(x))$ con $(fg)(x)$, esta última es el producto $f(x)g(x)$. Aquí

$$f(g(x)) = \sqrt{x + 1},$$

pero

$$f(x)g(x) = \sqrt{x}(x + 1).$$

EJEMPLO 3 Composición

Si $F(p) = p^2 + 4p - 3$ *y* $G(p) = 2p + 1$, *determinar*

a. $F(G(p))$, **b.** $G(F(1))$.

Solución:

a. $F(G(p)) = F(2p + 1) = (2p + 1)^2 + 4(2p + 1) - 3$

$= 4p^2 + 12p + 2.$

b. $G(F(1)) = G(1^2 + 4 \cdot 1 - 3) = G(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$

En cálculo, a veces es necesario pensar en una función en particular como una composición de dos funciones más sencillas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Principios en práctica 2

Cómo expresar una función como una composición

Supóngase que el área de un jardín cuadrado es $g(x) = (x + 3)^2$. Exprese g como una composición de dos funciones, y explique qué representa cada función.

EJEMPLO 4 Cómo expresar una función como una composición

Expresar $h(x) = (2x - 1)^3$ *como una composición.*

Solución:

Observamos que $h(x)$ se obtiene al encontrar $2x - 1$ y elevar al cubo el resultado. Suponga que hacemos $g(x) = 2x - 1$ y $f(x) = x^3$. Entonces

$$h(x) = (2x - 1)^3 = [g(x)]^3 = f(g(x)) = (f \circ g)(x),$$

que da h como una composición de dos funciones.

Tecnología

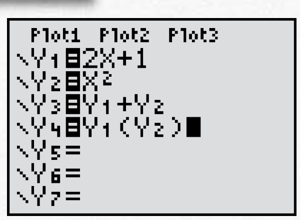


FIGURA 3.6 Y_3 y Y_4 son combinaciones de Y_1 y Y_2.

Dos funciones pueden combinarse usando una calculadora gráfica. Considere las funciones

$$f(x) = 2x + 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2,$$

que introducimos como Y_1 y Y_2, según se muestra en la figura 3.6. La suma de f y g está dada por $Y_3 = Y_1 + Y_2$ y la composición de $f \circ g$ por $Y_4 = Y_1(Y_2)$. Por ejemplo, $f(g(3))$ se obtiene evaluando Y_4 en 3.

Ejercicio 3.3

1. Si $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x + 5$, encuentre lo siguiente.
   a. $(f + g)(x)$. b. $(f + g)(0)$. c. $(f - g)(x)$.
   d. $(fg)(x)$. e. $(fg)(-2)$. f. $\dfrac{f}{g}(x)$.
   g. $(f \circ g)(x)$. h. $(f \circ g)(3)$. i. $(g \circ f)(x)$.

2. Si $f(x) = 2x$ y $g(x) = 6 + x$, encuentre lo siguiente.
   a. $(f + g)(x)$. b. $(f - g)(x)$. c. $(f - g)(4)$.
   d. $(fg)(x)$. e. $\dfrac{f}{g}(x)$. f. $\dfrac{f}{g}(2)$.
   g. $(f \circ g)(x)$. h. $(g \circ f)(x)$. i. $(g \circ f)(2)$.

3. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 + x$, encuentre lo siguiente.
   a. $(f + g)(x)$. b. $(f - g)(x)$. c. $(f - g)(-\frac{1}{2})$.
   d. $(fg)(x)$. e. $\dfrac{f}{g}(x)$. f. $\dfrac{f}{g}(-\frac{1}{2})$.
   g. $(f \circ g)(x)$. h. $(g \circ f)(x)$. i. $(g \circ f)(-3)$.

4. Si $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 4$, encuentre lo siguiente.
   a. $(f + g)(x)$. b. $(f + g)(\frac{1}{2})$. c. $(f - g)(x)$.
   d. $(fg)(x)$. e. $(fg)(4)$. f. $\dfrac{f}{g}(x)$.
   g. $(f \circ g)(x)$. h. $(f \circ g)(100)$. i. $(g \circ f)(x)$.

5. Si $f(x) = 3x^2 + 6$ y $g(x) = 4 - 2x$, encuentre $f(g(2))$ y $g(f(2))$.

6. Si $f(p) = \dfrac{4}{p}$ y $g(p) = \dfrac{p-2}{3}$, encuentre $(f \circ g)(p)$ y $(g \circ f)(p)$.

7. Si $F(t) = t^2 + 7t + 1$ y $G(t) = \dfrac{2}{t-1}$, encuentre $(F \circ G)(t)$ y $(G \circ F)(t)$.

8. Si $F(s) = \sqrt{s}$ y $G(t) = 3t^2 + 4t + 2$, encuentre $(F \circ G)(t)$ y $(G \circ F)(t)$.

9. Si $f(w) = \dfrac{1}{w^2 + 1}$ y $g(v) = \sqrt{v + 2}$, encuentre $(f \circ g)(v)$ y $(g \circ f)(w)$.

10. Si $f(x) = x^2 + 3$, encuentre $(f \circ f)(x)$.

En los problemas del 11 al 16 determine las funciones f y g tales que $h(x) = f(g(x))$.

11. $h(x) = (4x - 3)^5$.
12. $h(x) = \sqrt{x^2 - 2}$.
13. $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2}$.
14. $h(x) = (9x^3 - 5x)^3 - (9x^3 - 5x)^2 + 11$.
15. $h(x) = \sqrt[5]{\dfrac{x+1}{3}}$.
16. $h(x) = \dfrac{x + 1}{(x + 1)^2 + 2}$.

17. **Utilidad** Un expendio de café vende una libra de café por \$9.75. Los gastos mensuales son \$4500 más \$4.25 por cada libra de café vendida.
    a. Escriba una función $r(x)$ para el ingreso mensual total como una función del número de libras de café vendidas.
    b. Escriba una función $e(x)$ para los gastos mensuales totales como una función del número de libras de café vendidas.
    c. Escriba una función $(r - e)(x)$ para la utilidad mensual total como una función del número de libras de café vendidas.

18. **Geometría** Supóngase que el volumen de un cubo es $v(x) = (4x - 2)^3$. Exprese v como una composición de dos funciones, y explique qué representa cada función.

19. **Negocios** Un fabricante determina que el número total de unidades de producción por día, q, es una función del número de empleados, m, donde

$$q = f(m) = \frac{(40m - m^2)}{4}.$$

El ingreso total, r, que se recibe por la venta de q unidades, está dado por la función g, donde $r = g(q) = 40q$. Determine $(g \circ f)(m)$. ¿Qué es lo que describe esta función compuesta?

20. **Sociología** Se han hecho estudios concernientes a la relación estadística entre posición social, educación e ingresos de una persona.[5] Denotemos con S al valor numérico de la posición social con base en el ingreso anual I. Para cierto tipo de población suponga

$$S = f(I) = 0.45(I - 1000)^{0.53}.$$

Además, suponga que el ingreso de una persona I es una función del número de años de educación E, donde

$$I = g(E) = 7202 + 0.29E^{3.68}.$$

Determine $(f \circ g)(E)$. ¿Qué es lo que describe esta función?

[5]R. K. Leik y B. F. Meeker, *Mathematical Sociology* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1975).

En los problemas del 21 al 24, para las funciones f y g dadas, determine los valores funcionales indicados. Redondee las respuestas a dos decimales.

21. $f(x) = (4x - 13)^2$, $g(x) = 0.2x^2 - 4x + 3$; (a) $(f + g)(4.5)$, (b) $(f \circ g)(-2)$.

22. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x}}$, $g(x) = 13.4x + 7.31$; (a) $\dfrac{f}{g}(10)$, (b) $(g \circ f)(-6)$.

23. $f(x) = x^{2/3}$, $g(x) = x^3 - 7$; (a) $(fg)(5)$, (b) $(g \circ f)(2.25)$.

24. $f(x) = \dfrac{5}{x+3}$, $g(x) = \dfrac{2}{x^2}$; (a) $(f - g)(7.3)$, (b) $(f \circ g)(-4.17)$.

3.4 Gráficas en coordenadas rectangulares

OBJETIVO Graficar ecuaciones y funciones en coordenadas rectangulares, determinar intersecciones, aplicar la prueba de la recta vertical y determinar el dominio y rango de una función a partir de una gráfica.

Un **sistema de coordenadas rectangulares** (o **cartesiano**) nos permite especificar y localizar puntos en un plano. También nos proporciona una manera geométrica para representar ecuaciones de dos variables, así como funciones.

En un plano se trazan dos rectas de números reales, llamadas *ejes de coordenadas*, perpendiculares entre sí, y de modo que sus orígenes coincidan, como en la figura 3.7. Su punto de intersección se llama *origen* del sistema de coordenadas. Por ahora llamaremos a la recta horizontal el *eje x* y a la vertical el *eje y*. La distancia unitaria sobre el eje x no necesariamente es la misma que la del eje y.

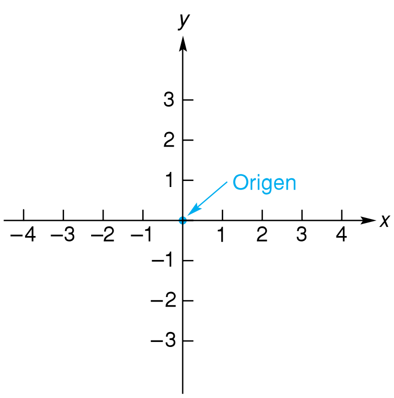


FIGURA 3.7 Ejes de coordenadas.

El plano sobre el cual están los ejes de coordenadas se llama *plano de coordenadas rectangulares* o, simplemente, *plano x, y*. Todo punto en él puede marcarse para indicar su posición. Para marcar el punto P en la figura 3.8(a), trazamos líneas perpendiculares al eje x y al eje y que pasen por el punto P. Dichas líneas cruzan los ejes en 4 y 2, respectivamente. Por tanto, determinan dos números, 4 y 2, entonces decimos que las **coordenadas rectangulares** de P están dadas por el **par ordenado** (4, 2). La palabra *ordenado* es importante. En la figura 3.8(b) el punto correspondiente a (4, 2) no es el mismo que para (2, 4):

$$(4, 2) \neq (2, 4).$$

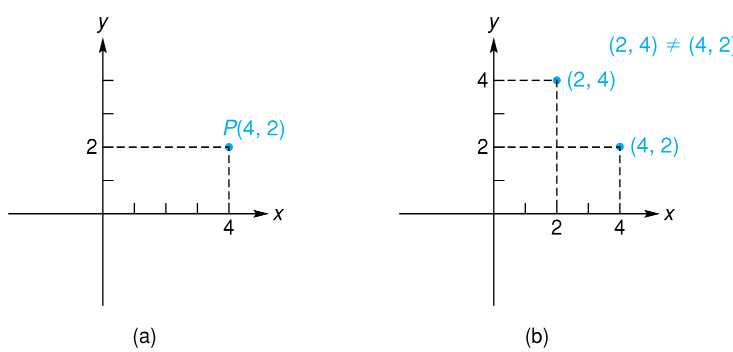


FIGURA 3.8 Coordenadas rectangulares.

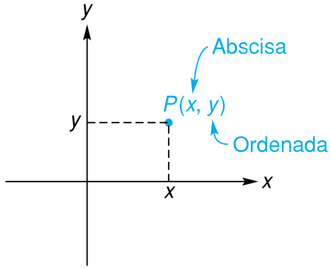


FIGURA 3.9 Coordenadas de P.

En general, si P es cualquier punto, entonces sus coordenadas rectangulares estarán dadas por un par ordenado de la forma (x, y). (Véase la fig. 3.9.) Llamamos a x la *abscisa* o *coordenada x* de P, y a y la *ordenada* o *coordenada y* de P.

De este modo, con cada punto en un plano coordenado podemos asociar exactamente un par ordenado (x, y) de números reales. También debe ser claro que con cada par ordenado (x, y) de números reales, podemos asociar exactamente un punto en ese plano. Ya que existe una *correspondencia uno a uno* entre los puntos en el plano y todos los pares ordenados de números reales, nos referimos al punto P con abscisa x y ordenada y, simplemente como el punto (x, y), o como $P(x, y)$. Además, usaremos las palabras *punto* y *par ordenado* en forma indistinta.

En la figura 3.10 están indicadas las coordenadas de varios puntos. Por ejemplo, el punto $(1, -4)$ está localizado una unidad a la derecha del eje y, y cuatro unidades abajo del eje x. El origen es $(0, 0)$. La coordenada x de todo punto en el eje y es 0 y la coordenada y de todo punto sobre el eje x es 0.

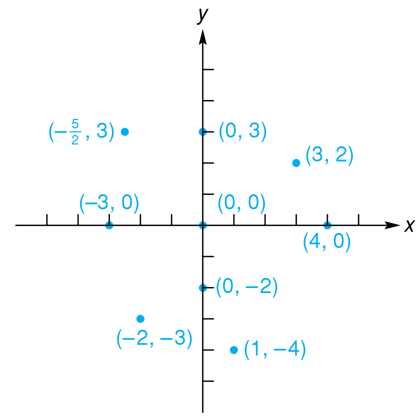


FIGURA 3.10 Coordenadas de puntos.

Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas *cuadrantes* (véase la fig. 3.11). Por ejemplo, el cuadrante I consiste en todos los puntos (x_1, y_1) con $x_1 > 0$ y $y_1 > 0$. Los puntos sobre los ejes no están en ningún cuadrante.

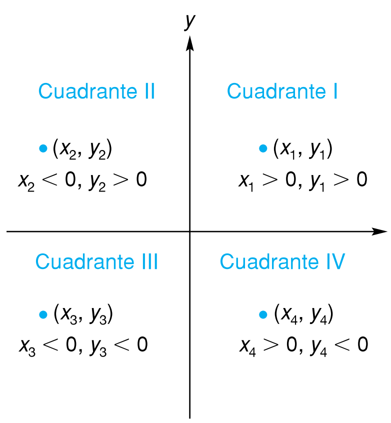


FIGURA 3.11 Cuadrantes.

Utilizando un sistema de coordenadas rectangulares, podemos representar geométricamente ecuaciones de dos variables. Por ejemplo, considere

$$y = x^2 + 2x - 3. \tag{1}$$

Una solución de esta ecuación es un valor de x y uno de y que hagan verdadera a la ecuación. Por ejemplo, si $x = 1$, sustituyendo en la ecuación (1) se obtiene

$$y = 1^2 + 2(1) - 3 = 0.$$

Así, una solución es, $x = 1$, $y = 0$. De manera análoga,

$$\text{si } x = -2, \quad \text{entonces} \quad y = (-2)^2 + 2(-2) - 3 = -3,$$

y en esta forma $x = -2$, $y = -3$, también es una solución. Seleccionando otros valores para x podemos obtener más soluciones [véase la fig. 3.12(a)]. Debe quedar claro que existe una infinidad de soluciones para la ecuación (1).

x	y
−4	5
−3	0
−2	−3
−1	−4
0	−3
1	0
2	5

(a)

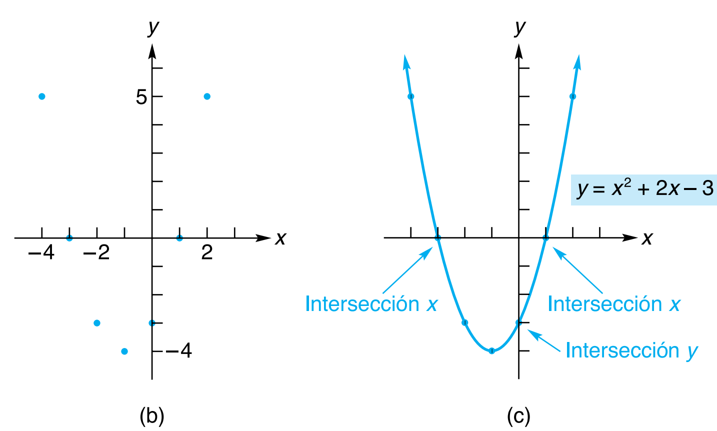


FIGURA 3.12 Graficación de $y = x^2 + 2x - 3$.

Cada solución da origen a un punto $(x, \ y)$ Por ejemplo, a $x = 1$ y $y = 0$ le corresponde $(1, \ 0)$. La **gráfica** de $y = x^2 + 2x - 3$ es la representación geométrica de todas sus soluciones. En la figura 3.12(b) hemos graficado los puntos correspondientes a las soluciones dadas en la tabla.

Ya que la ecuación tiene un número infinito de soluciones, parece imposible determinar su gráfica con precisión. Sin embargo, sólo estamos interesados en la forma general de la gráfica. Por esta razón graficamos suficientes puntos de modo que podamos hacernos una idea aproximada acerca de su forma. Entonces unimos esos puntos por medio de una curva suave siempre que las condiciones lo permitan. Al hacer esto, obtenemos la curva de la figura 3.12(c). Por supuesto, entre más puntos marquemos, mejor será nuestra gráfica. Aquí suponemos que la gráfica se extiende de manera indefinida hacia arriba, lo cual se indica con la flechas.

Con frecuencia, sólo decimos que la intersección y es –3 y las intersecciones x son –3 y 1.

El punto $(0, -3)$ en donde la curva interseca al eje y se llama *intersección y*. Los puntos $(-3, 0)$ y $(1, 0)$ en donde la curva interseca al eje x se llaman las *intersecciones x*. En general, tenemos la definición siguiente.

Definición

Una ***intersección x*** de la gráfica de una ecuación en x y y, es el punto donde la gráfica interseca al eje x. Una ***intersección y*** es el punto donde la gráfica interseca al eje y.

Para encontrar las intersecciones x de la gráfica de una ecuación en x y y, primero hacemos $y = 0$, y resolvemos para x la ecuación resultante. Para encontrar las intersecciones y, primero hacemos $x = 0$ y resolvemos para y. Por ejemplo, para la gráfica de $y = x^2 + 2x - 3$, determinemos las intersecciones x. Haciendo $x = 0$ x resolviendo para x obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 2x - 3, \\ 0 &= (x + 3)(x - 1), \\ x &= -3, 1. \end{aligned}$$

Así, las intersecciones x son $(-3, 0)$ y $(1, 0)$, como vimos antes. Si $x = 0$, entonces

$$y = 0^2 + 2(0) - 3 = -3.$$

De modo que $(0, -3)$ es la intersección y. Tenga en mente que para una intersección x su coordenada y es igual a cero, mientras que para una intersección y su coordenada x es igual a cero. Las intersecciones son útiles porque indican con precisión en dónde interseca la gráfica a los ejes.

Principios en práctica 1
Intersecciones y gráfica

Raquel ha ahorrado \$7250 para gastos del colegio. Ella planea gastar \$600 por mes de esta cuenta. Escriba una ecuación que represente la situación e identifique las intersecciones con los ejes.

EJEMPLO 1 Intersecciones y gráfica

Determinar las intersecciones x y y de la gráfica de $y = 2x + 3$ y hacer el bosquejo de su gráfica.

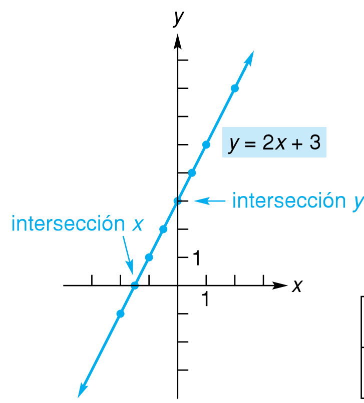
Solución: si $y = 0$, entonces

$$0 = 2x + 3 \qquad \text{o} \qquad x = -\frac{3}{2}.$$

Así, la intersección x es $(-\frac{3}{2}, 0)$. Si $x = 0$, entonces

$$y = 2(0) + 3 = 3.$$

De modo que la intersección y es $(0, 3)$. La figura 3.13 muestra una tabla de otros puntos sobre la gráfica y un bosquejo de ésta.



x	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	2	-2
y	3	0	4	2	5	1	7	-1

FIGURA 3.13 Gráfica de $y = 2x + 3$.

■ ***Principios en práctica 2***
Intersecciones y gráfica

El precio de admisión a un parque de diversiones es de $24.95. Este pago permite al cliente utilizar todas las atracciones del parque tantas veces como quiera. Escriba una ecuación que represente la relación entre el número de recorridos, x, que el cliente hace, y el costo de admisión, y, para ese cliente. Describa la gráfica de esta ecuación e identifique las intersecciones con los ejes. Suponga que $x > 0$.

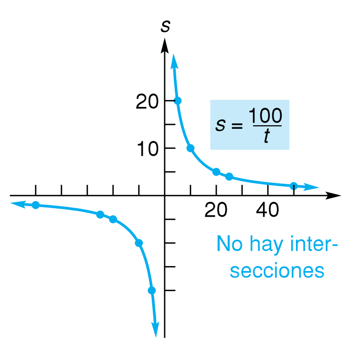
EJEMPLO 2 Intersecciones y gráfica

Determinar las intersecciones, si las hay, de la gráfica de $s = \dfrac{100}{t}$ *y hacer un bosquejo de la gráfica.*

Solución: para la gráfica marcaremos al eje horizontal con t y al eje vertical con s (véase la fig. 3.14). Puesto que t no puede ser igual a cero (la división entre cero no está definida), no existe intersección con el eje s. Así, la gráfica no tiene un punto correspondiente a $t = 0$. Además, no existe intersección con el eje t, ya que si $s = 0$, entonces la ecuación

$$0 = \frac{100}{t}$$

no tiene solución. La figura 3.14 muestra la gráfica. En general, la gráfica de $s = k/t$, en donde k es una constante diferente de cero, se conoce como *hipérbola*. ■



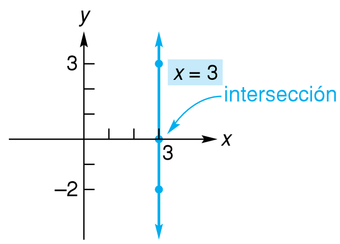
t	5	-5	10	-10	20	-20	25	-25	50	-50
s	20	-20	10	-10	5	-5	4	-4	2	-2

FIGURA 3.14 Gráfica de $s = \dfrac{100}{t}$.

EJEMPLO 3 Intersecciones y gráfica

Determinar las intersecciones de la gráfica de $x = 3$ *y hacer el bosquejo de la gráfica.*

Solución: podemos pensar en $x = 3$ como una ecuación en las variables x y y, si la escribimos como $x = 3 + 0y$. Aquí y puede tomar cualquier valor, pero x debe ser igual a 3. Puesto que $x = 3$ cuando $y = 0$, la intersección x es $(3,\ 0)$. No existe intersección y, ya que x no puede ser cero. (Véase la fig. 3.15.) La gráfica es una recta vertical.



x	3	3	3
y	0	3	–2

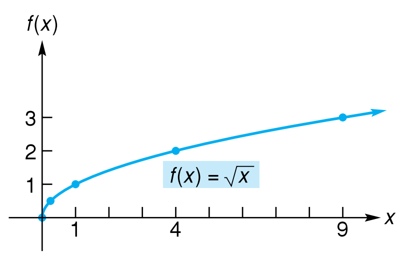
FIGURA 3.15 Gráfica de $x = 3$.

Además de representar a las funciones en ecuaciones, también podemos representarlas en un plano coordenado. Si f es una función con variable independiente x y variable dependiente y, entonces la gráfica de f sólo es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. Ésta consiste en todos los puntos $(x,\ y)$ o $(x, f(x))$, en donde x está en el dominio de f. El eje vertical puede marcarse como y o como $f(x)$, el cual se denomina **eje de los valores de la función.** *Siempre marcamos al eje horizontal con la variable independiente*.

EJEMPLO 4 Gráfica de la función raíz cuadrada

Hacer la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

Solución: véase la figura 3.16. Marcamos al eje vertical como $f(x)$. Recuerde que $\sqrt{x}$ denota la raíz cuadrada *principal* de x. Así, $f(9) = \sqrt{9} = 3$ no ± 3. Tampoco podemos elegir valores negativos de x, ya que no queremos números imaginarios para $\sqrt{x}$. Esto es, debemos tener $x \geq 0$. Ahora consideramos las intersecciones. Si $f(x) = 0$, entonces $\sqrt{x} = 0$ o $x = 0$. También, si $x = 0$, entonces $f(x) = 0$. Así, las intersecciones x y y son las mismas, es decir, $(0,\ 0)$.



x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
f(x)	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3

FIGURA 3.16 Gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

Principios en práctica 3
Gráfica de la función valor absoluto

Brett rentó una bicicleta en un negocio de alquiler de bicicletas, condujo a una velocidad constante de 12 mi/h durante 2.5 horas en una ruta para bicicletas, y después regresó por el mismo camino. Grafique la función valor absoluto para representar la distancia recorrida desde el negocio de alquiler de bicicletas, como una función del tiempo en el dominio apropiado.

EJEMPLO 5 Gráfica de la función valor absoluto

Graficar $p = G(q) = |q|$.

Solución: usamos la variable independiente q para marcar al eje horizontal. El eje de los valores de la función puede marcarse como $G(q)$ *o* p (véase la fig. 3.17). Note que las intersecciones p *y* q son el mismo punto, $(0,\ 0)$.

q	0	1	–1	3	–3	5	–5
p	0	1	1	3	3	5	5

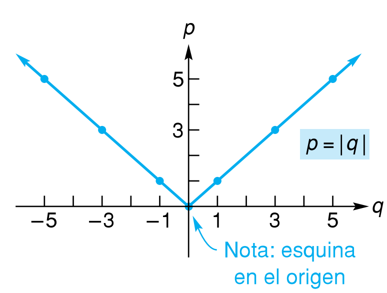


FIGURA 3.17 Gráfica de $p = |q|$.

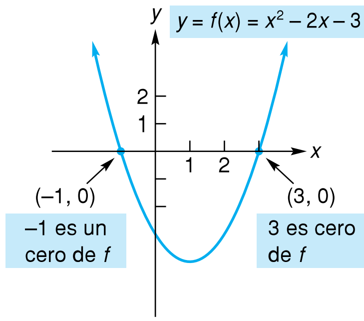


FIGURA 3.18 Ceros de una función.

En general, las soluciones reales para una ecuación $f(x) = 0$ son los ceros reales de f.

La noción de un *cero* es importante en el estudio de las funciones.

Definición

Un ***cero*** de una función f es cualquier valor de x para el cual $f(x) = 0$.

Por ejemplo, un cero de la función $f(x) = 2x - 6$ es 3 porque $f(3) = 2(3) - 6 = 0$. Aquí llamamos a 3 un cero *real,* ya que es un número real. Observamos que los ceros de f pueden encontrarse haciendo $f(x) = 0$ y resolviendo para x. Así, los ceros reales de una función son precisamente las intersecciones x de su gráfica, ya que es en estos puntos en que $f(x) = 0$.

Para mayor ilustración, la figura 3.18 muestra la gráfica de la función de $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$. Las intersecciones x de la gráfica son -1 y 3. Así, -1 y 3 son ceros de f, o lo que es equivalente a decir que -1 y 3 son las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Tecnología

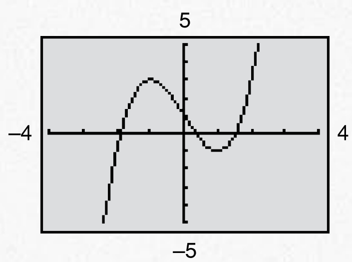


FIGURA 3.19 Las raíces de $x^3 - 3x + 1 = 0$ son aproximadamente -1.88, 0.35, y 1.53.

Para resolver la ecuación $x^3 = 3x - 1$ con una calculadora gráfica, primero expresamos la ecuación en la forma $f(x) = 0$.

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Después graficamos f y luego estimamos las intersecciones x, ya sea utilizando el acercamiento (*zoom*) y rastreo, o por medio de la operación de extracción de raíces (véase la fig. 3.19). Observe que definimos nuestra ventana para $-4 \le x \le 4$ y $-5 \le y \le 5$.

La figura 3.20 muestra la gráfica de alguna función $y = f(x)$. El punto $(x, f(x))$ implica que, al número de entrada x en el eje horizontal, le corresponde el número de salida $f(x)$ en el eje vertical, como lo indica la flecha. Por ejemplo, a la entrada 4 le corresponde la salida 3, de modo que $f(4) = 3$.

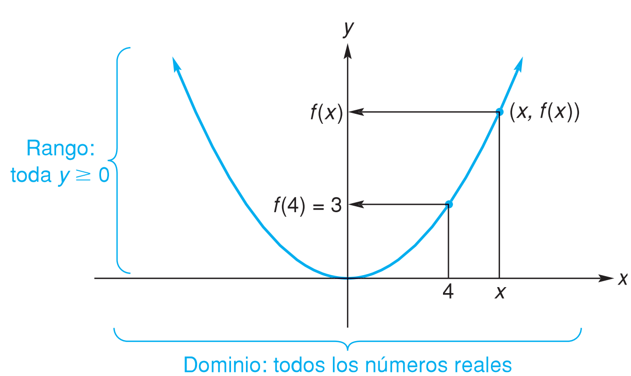


FIGURA 3.20 Dominio, rango y valores funcionales.

De la forma de la gráfica, parece razonable suponer que para cualquier valor de x existe un número de salida, de modo que el dominio de f son todos los números reales. Observe que el conjunto de todas las coordenadas y puntos en la gráfica es el conjunto de todos los números no negativos. Así, el rango de f es toda $y \geq 0$. Esto muestra que podemos hacer una deducción acertada acerca del dominio y rango de una función viendo su gráfica. *En general*, *el dominio consiste en todos los valores x que están incluidos en la gráfica*, y el *rango son todos los valores y en esa gráfica*. Por ejemplo, la figura 3.16 implica que el dominio y el rango de $f(x) = \sqrt{x}$ son todos los números no negativos. De la figura 3.17 queda claro que el dominio de $p = G(q) = |q|$ son todos los números reales y que el rango es toda $p \geq 0$.

EJEMPLO 6 Dominio, rango y valores de la función

La figura 3.21 muestra la gráfica de una función F. A la derecha de 4 se supone que la gráfica se repite indefinidamente. Entonces el dominio de F es toda $t \geq 0$. El rango es $-1 \leq s \leq 1$. Algunos valores de la función son

$$F(0) = 0, \qquad F(1) = 1, \qquad F(2) = 0, \qquad F(3) = -1.$$

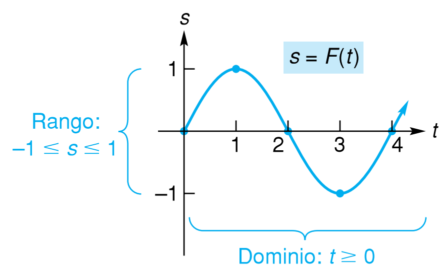


FIGURA 3.21 Dominio, rango y valores funcionales.

Tecnología

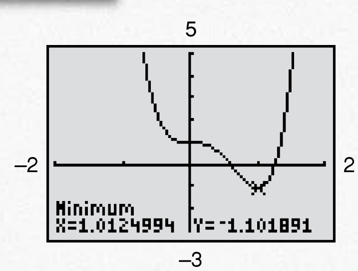


FIGURA 3.22 El rango de $f(x) = 6x^4 - 8.1x^3 + 1$ es aproximadamente $[-1.10, \infty)$.

Utilizando una calculadora gráfica podemos estimar el rango de una función. La gráfica de

$$f(x) = 6x^4 - 8.1x^3 + 1$$

se muestra en la figura 3.22. El punto más bajo en la gráfica corresponde al valor mínimo de $f(x)$, y el rango son todos los números reales mayores o iguales a este mínimo. Podemos estimar el valor mínimo para y utilizando rastreo y acercamiento (*zoom*), o bien seleccionando la operación "mínimo".

EJEMPLO 7 Gráfica de una función definida por partes

Graficar la función definida por partes

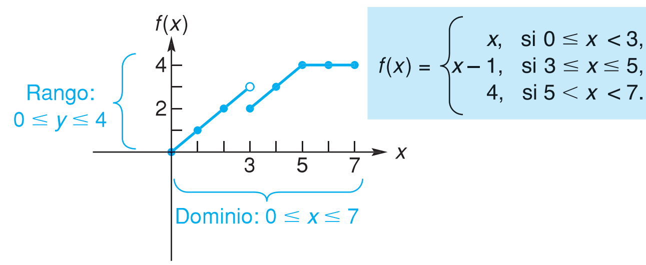
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 3, \\ x - 1, & \text{si } 3 \leq x \leq 5, \\ 4, & \text{si } 5 < x \leq 7. \end{cases}$$

Principios en práctica 4

Gráfica de una función definida por partes

Para alentar el ahorro, una compañía de gas cobra dos tarifas. Usted paga \$0.53 por termia para un consumo de 0-70 termias, y \$0.74 por cada termia por encima de 70. Haga la gráfica de la función definida por partes, que representa el costo mensual de t termias de gas.

Solución: el dominio de f es $0 \leq x \leq 7$. La gráfica se da en la figura 3.23, donde el *punto hueco* significa que éste *no* está incluido en la gráfica. Observe que el rango de f son todos los números reales y tales que $0 \leq y \leq 4$.



x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0	1	2	2	3	4	4	4

FIGURA 3.23 Gráfica de una función definida por partes.

Existe una manera fácil para determinar si una curva es o no la gráfica de una función. En la figura 3.24(a) observe que con la x dada existen asociados *dos* valores de y: y_1 y y_2. Así, la curva *no* es la gráfica de una función de x. Viéndolo de otra manera, tenemos la siguiente regla general llamada **prueba de la recta vertical.** Si una recta *vertical* L puede dibujarse de modo que interseque a una curva en al menos dos puntos, entonces la curva *no* es la gráfica de una función de x. Cuando tal recta vertical no puede dibujarse del mismo modo, la curva *sí es* la gráfica de una función de x. En consecuencia, las curvas de la figura 3.24 no representan funciones de x, pero las de la figura 3.25 sí.

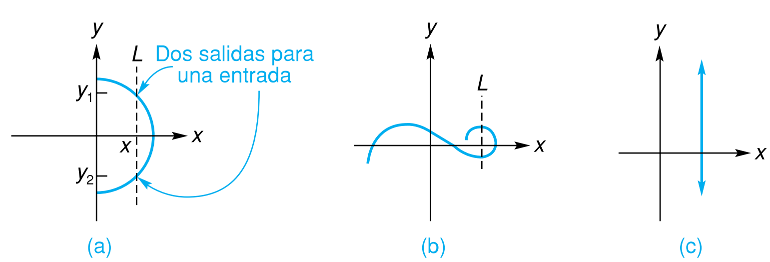


FIGURA 3.24 y no es una función de x.

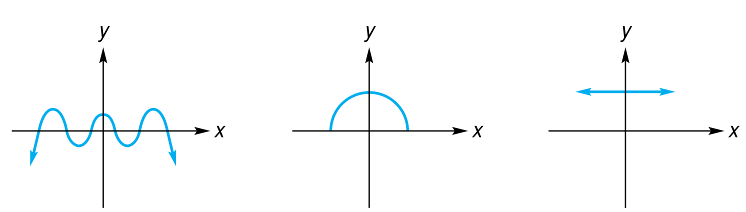


FIGURA 3.25 Funciones de x.

EJEMPLO 8 Una gráfica que no representa una función de x

Graficar $x = 2y^2$.

Solución: aquí es más fácil seleccionar valores de y y después encontrar los correspondientes a x. La figura 3.26 muestra la gráfica. Por medio de la prueba de la recta vertical, la ecuación $x = 2y^2$ no define una función de x.

x	0	2	2	8	8	18	18
y	0	1	−1	2	−2	3	−3

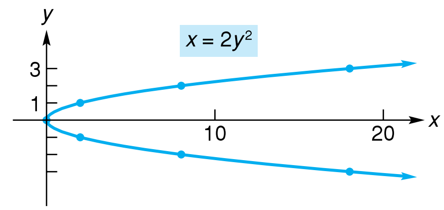


FIGURA 3.26 Gráfica de $x = 2y^2$.

Ejercicio 3.4

En los problemas 1 y 2 localice y marque cada uno de los puntos dados y, si es posible, indique el cuadrante al que pertenece cada punto.

1. $(2, 7)$, $(8, -3)$, $(-\frac{1}{2}, -2)$, $(0, 0)$.

2. $(-4, 5)$, $(3, 0)$, $(1, 1)$, $(0, -6)$.

3. La figura 3.27(a) muestra la gráfica de $y = f(x)$.
- **a.** Estime $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$, y $f(2)$.
- **b.** ¿Cuál es el dominio de f?
- **c.** ¿Cuál es el rango de f?
- **d.** ¿Cuál es un cero real de f?

4. La figura 3.27(b) muestra la gráfica de $y = f(x)$.
- **a.** Estime $f(0)$ y $f(2)$.
- **b.** ¿Cuál es el dominio de f?
- **c.** ¿Cuál es el rango de f?
- **d.** ¿Cuál es un cero real de f?

5. La figura 3.28(a) muestra la gráfica de $y = f(x)$.
- **a.** Estime $f(0)$, $f(1)$, y $f(-1)$.
- **b.** ¿Cuál es el dominio de f?
- **c.** ¿Cuál es el rango de f?
- **d.** ¿Cuál es un cero real de f?

6. La figura 3.28(b) muestra la gráfica de $y = f(x)$.
- **a.** Estime $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$, y $f(4)$.
- **b.** ¿Cuál es el dominio de f?
- **c.** ¿Cuál es el rango de f?
- **d.** ¿Cuál es un cero real de f?

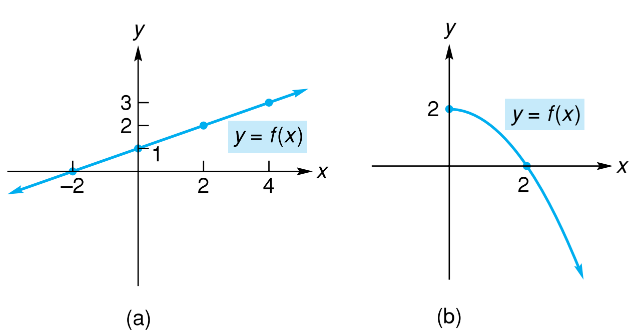


FIGURA 3.27 Diagrama para los problemas 3 y 4.

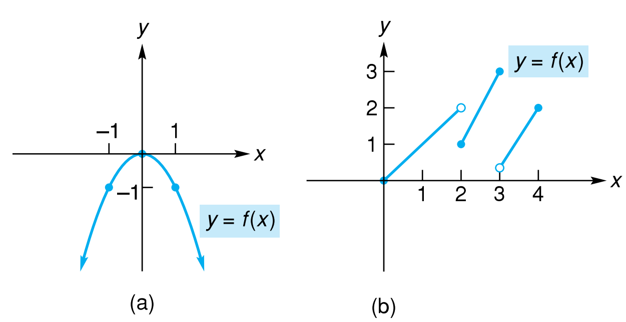


FIGURA 3.28 Diagrama para los problemas 5 y 6.

En los problemas del 7 al 20 determine las intersecciones de la gráfica de cada ecuación y haga el bosquejo de la gráfica. Con base en su gráfica, ¿es y una función de x?, si es así, ¿cuál es su dominio y cuál su rango?

7. $y = 2x$. **8.** $y = x + 1$. **9.** $y = 3x - 5$. **10.** $y = 3 - 2x$.

11. $y = x^2$. **12.** $y = \dfrac{3}{x}$. **13.** $x = 0$. **14.** $y = 4x^2 - 16$.

15. $y = x^3$. **16.** $x = -4$. **17.** $x = -3y^2$. **18.** $x^2 = y^2$.

19. $2x + y - 2 = 0$. **20.** $x + y = 1$.

En los problemas del 21 al 34 grafique cada función y determine su dominio y rango. También determine las intersecciones.

21. $s = f(t) = 4 - t^2$. **22.** $f(x) = 5 - 2x^2$. **23.** $y = g(x) = 2$. **24.** $G(s) = -8$.

25. $y = h(x) = x^2 - 4x + 1$. **26.** $y = f(x) = x^2 + 2x - 8$.

27. $f(t) = -t^3$. **28.** $p = h(q) = q(3 + q)$. **29.** $s = F(r) = \sqrt{r - 5}$. **30.** $F(r) = -\dfrac{1}{r}$.

31. $f(x) = |2x - 1|$. **32.** $v = H(u) = |u - 3|$. **33.** $F(t) = \dfrac{16}{t^2}$. **34.** $y = f(x) = \dfrac{2}{x - 4}$.

En los problemas del 35 al 38 grafique cada función definida por partes y determine su dominio y rango.

35. $c = g(p) = \begin{cases} p, & \text{si } 0 \le p < 6, \\ 5, & \text{si } p \ge 6. \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{si } -1 \le x < 2, \\ 9 - x^2, & \text{si } x \ge 2. \end{cases}$

37. $g(x) = \begin{cases} x + 6, & \text{si } x \ge 3, \\ x^2, & \text{si } x < 3. \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } 0 < x \le 3, \\ 4, & \text{si } 3 < x \le 5, \\ x - 1, & \text{si } x > 5. \end{cases}$

39. ¿Cuáles de las gráficas de la figura 3.29 representan funciones de x?

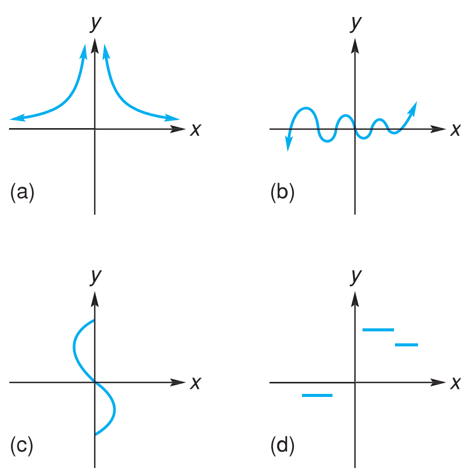


FIGURA 3.29 Diagrama para el problema 39.

40. Pagos de una deuda Janelle tiene cargos por \$1800 en sus tarjetas de crédito. Ella planea pagarlas por medio de pagos mensuales de \$175. Escriba una ecuación que represente el monto de su deuda, excluyendo los cargos financieros, e identifique las intersecciones con los ejes.

41. Determinación de precios Para alentar un flujo constante de clientes, un restaurante varía el precio de un platillo a lo largo del día. De 6:00 P.M. a 8:00 P.M., los clientes pagan el precio completo. En el almuerzo, de 10:30 A.M. hasta las 2:30 P.M., los clientes pagan la mitad del precio. De 2:30 P.M. hasta las 4:30 P.M., los clientes obtienen un dólar de ahorro del precio del almuerzo. De 4:30 P.M. hasta las 6:00 P.M., los clientes obtienen \$5.00 de ahorro con respecto al precio de la cena. De 8:00 P.M. hasta el cierre, a las 10:00 P.M., los clientes obtienen \$5.00 de ahorro con respecto al precio de la cena. Grafique la función definida por partes para representar el costo de un platillo a lo largo del día para un precio de cena de \$18.

42. Programa de oferta Dado el siguiente programa de oferta (véase el ejemplo 5 de la sec. 3.1), grafique cada pareja cantidad-precio, seleccionando el eje horizontal para las cantidades posibles. Aproxime los puntos entre los datos por medio de una curva suave. El resultado es la *curva de la oferta*. Con base en la gráfica, determine la relación entre el precio y la oferta (esto es, cuando se incrementa el precio, ¿qué le pasa a la cantidad ofrecida?). ¿El precio por unidad es una función de la cantidad de oferta?

Cantidad ofrecida por semana, q	Precio por unidad, p
30	\$10
100	20
150	30
190	40
210	50

43. Programa de demanda La tabla siguiente se conoce como *programa de demanda*. Éste indica la cantidad de la marca X que los consumidores demandan (esto es, compran) cada semana a cierto precio (en dólares) por unidad. Trace cada par precio-cantidad seleccionando el eje vertical para los precios posibles y una los puntos con una curva suave. De esta manera , aproximamos los puntos entre los datos dados. El resultado se llama la *curva de demanda*. Con base en la gráfica, determine la relación entre el precio de la marca X y la cantidad que será demandada (esto es, cuando el precio disminuye, ¿qué le pasa a la cantidad demandada?). El precio por unidad, ¿es una función de la cantidad demandada?

Cantidad demandada, q	**Precio, por unidad, p**
5	\$20
10	10
20	5
25	4

44. Inventario Haga un bosquejo de la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} -100x + 1000, & \text{si } 0 \le x < 7, \\ -100x + 1700, & \text{si } 7 \le x < 14, \\ -100x + 2400, & \text{si } 14 \le x < 21. \end{cases}$$

Una función como ésta podría describir el inventario y de una compañía en el instante x.

45. Psicología En un experimento psicológico sobre información visual, un sujeto observó brevemente un arreglo de letras, después se le pidió recordar tantas letras del arreglo como le fuese posible. El procedimiento se repitió varias veces. Suponga que y es el número promedio de letras recordadas de arreglos con x letras. La gráfica de los resultados aproximadamente se ajusta a la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \le x \le 4, \\ \frac{1}{2}x + 2, & \text{si } 4 < x \le 5, \\ 4.5, & \text{si } 5 < x \le 12. \end{cases}$$

Grafique esta función.[6]

En los problemas del 46 al 49 utilice una calculadora gráfica para determinar todas las raíces reales de la ecuación dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

46. $7x^3 + 2x = 3$.

47. $x(x^2 - 3) = x^4 + 1$.

48. $(9x + 3.1)^2 = 7.4 - 4x^2$.

49. $(x - 2)^3 = x^2 - 3$.

En los problemas del 50 al 53 utilice una calculadora gráfica para determinar todos los ceros reales de la función dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

50. $f(x) = x^3 + 5x + 7$.

51. $f(x) = x^4 - 2.5x^3 - 2$.

52. $g(x) = x^4 - 2.5x^3 + x$.

53. $g(x) = \sqrt{3}x^5 - 4x^2 + 1$.

En los problemas del 54 al 56 utilice una calculadora gráfica para determinar (a) el valor máximo de f(x) y (b) el valor mínimo de f(x) para los valores indicados de x. Redondee las respuestas a dos decimales.

54. $f(x) = x^4 - 4.1x^3 + x^2 + 10, \quad 1 \le x \le 4$.

55. $f(x) = x(2.1x^2 - 3)^2 - x^3 + 1, \quad -1 \le x \le 1$.

56. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x - 5}, \quad 3 \le x \le 5$.

57. A partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt{2}x^3 + 1.1x^2 + 4$ determine (a) el rango y (b) las intersecciones. Redondee los valores a dos decimales.

58. Con base en la gráfica de $f(x) = 2 - 3x^3 - x^4$ determine (a) el valor máximo de $f(x)$, (b) el rango de f y (c) los ceros reales de f. Redondee los valores a dos decimales.

59. De la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 + 9.1}{3.8 + \sqrt{x}}$, determine (a) el valor mínimo de $f(x)$, (b) el rango de f, (c) las intersecciones y (d) ¿Tiene f ceros reales? Redondee los valores a dos decimales.

60. Grafique $f(x) = \dfrac{4.1x^3 + \sqrt{2}}{x^2 - 3}$ para $2 \le x \le 5$.

Determine (a) el valor máximo de $f(x)$, (b) el valor mínimo de $f(x)$, (c) el rango de f y (d) todas las intersecciones. Redondee los valores a dos decimales.

[6]Adaptado de G. R. Loftus y E. F. Loftus, *Human Memory: The Processing of Information* (Nueva York: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., distribuido por Halsted Press, División de John Wiley & Sons, Inc., 1976).

OBJETIVO Estudiar la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen, y aplicar la simetría en el trazado de curvas.

3.5 SIMETRÍA

Examinar el comportamiento gráfico de las ecuaciones es parte fundamental de las matemáticas. En esta sección examinaremos ecuaciones para determinar si sus gráficas tienen *simetría*. En un capítulo posterior se verá que el cálculo es de *gran* ayuda en la graficación, con base en él se determina la forma de una gráfica, ya que proporciona técnicas muy útiles para determinar si una curva se une o no de manera "suave" entre los puntos.

Considere la gráfica de $y = x^2$ en la figura 3.30. La parte a la izquierda del eje y es el reflejo (o imagen de espejo) de la parte de la derecha del mismo eje, y viceversa. Con mayor precisión, si (x_0, y_0) es cualquier punto sobre la gráfica, entonces el punto $(-x_0, y_0)$ también debe pertenecer a la gráfica. Decimos que esta gráfica es *simétrica con respecto al eje y*.

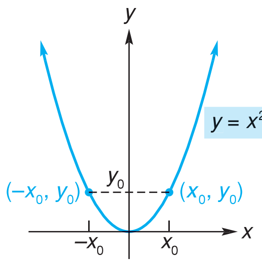


FIGURA 3.30 Simetría con respecto al eje y.

Definición

Una gráfica es ***simétrica con respecto al eje y*** si sólo si $(-x_0, y_0)$ pertenece a la gráfica cuando (x_0, y_0) está en ella.

EJEMPLO 1 Simetría con respecto al eje *y*

Utilice la definición anterior para demostrar que la gráfica de $y = x^2$ es simétrica con respecto al eje y.

Solución: suponga que (x_0, y_0) *es cualquier* punto de la gráfica de $y = x^2$. Entonces

$$y_0 = x_0^2.$$

Debemos mostrar que las coordenadas de $(-x_0, y_0)$ satisfacen $y = x^2$:

$$¿y_0 = (-x_0)^2?$$

$$¿y_0 = x_0^2?$$

Pero, de lo anterior sabemos que $y_0 = x_0^2$. Así, la gráfica *es* simétrica con respecto al eje y.

Cuando demostramos la simetría en el ejemplo 1, (x_0, y_0) pudo haber sido cualquier punto sobre la gráfica. Por conveniencia, de aquí en adelante omitiremos los subíndices. Esto significa que una gráfica es simétrica con respecto al eje y, si al reemplazar x por $-x$ en su ecuación, nos resulta una ecuación equivalente.

Otro tipo de simetría se muestra por medio de la gráfica de $x = y^2$ en la figura 3.31. Aquí la parte de la gráfica debajo del eje x es la reflexión con respecto del eje x, de la parte que se encuentra por arriba de éste, y viceversa. Si el punto (x, y) pertenece a la gráfica, entonces $(x, -y)$ también pertenece a ella. Esta gráfica se dice que es *simétrica con respecto al eje x*.

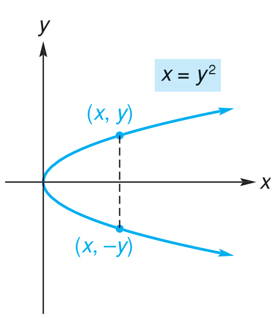


FIGURA 3.31 Simetría con respecto al eje x.

Definición

Una gráfica es ***simétrica con respecto al eje x*** si y sólo si $(x, -y)$ pertenece a la gráfica cuando (x, y) pertenece a ella.

Así, la gráfica de una ecuación en x y y tendrá simetría con respecto al eje x, si al reemplazar y por $-y$ resulta una ecuación equivalente. Por ejemplo, aplicando esta prueba a la gráfica de $x = y^2$ mostrada en la figura 3.31 se obtiene

$$x = (-y)^2,$$

$$x = y^2,$$

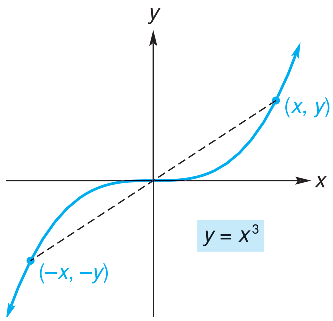


FIGURA 3.32 Simetría con respecto al origen.

la cual es equivalente a la ecuación original. Así podemos afirmar que la gráfica es simétrica con respecto al eje x.

Un tercer tipo de simetría, *simetría con respecto al origen*, se ilustra por la gráfica de $y = x^3$ (véase la fig. 3.32). Siempre que el punto (x, y) pertenezca a la gráfica, $(-x, -y)$ también pertenecerá a ella. Como resultado de esto, el segmento de línea que une a los puntos (x, y) y $(-x, -y)$ está bisecado por el origen.

Definición

Una gráfica es ***simétrica con respecto al origen*** si y sólo si $(-x, -y)$ pertenece a la gráfica cuando (x, y) pertenece a ella.

Así, la gráfica de una ecuación en x y y tendrá simetría con respecto al origen, si al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$, resulta una ecuación equivalente. Por ejemplo, aplicando esta prueba a la gráfica de $y = x^3$ mostrada en la figura 3.32, se obtiene

$$-y = (-x)^3,$$
$$-y = -x^3,$$
$$y = x^3,$$

que es equivalente a la ecuación original. De acuerdo con esto, la gráfica es simétrica con respecto al origen.

La tabla 3.1 resume las pruebas para la simetría. Cuando sabemos que una gráfica tiene simetría, podemos hacer su bosquejo con menos puntos de los que, de otra manera, serían necesarios.

TABLA 3.1 Pruebas para la simetría

Simetría con respecto al eje x	Reemplace y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al eje y	Reemplace x por $-x$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al origen	Reemplace x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.

EJEMPLO 2 Graficación con intersecciones y simetría

Probar la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen de $y = \frac{1}{x}$. *Después determinar las intersecciones y hacer el bosquejo de la gráfica.*

Solución:

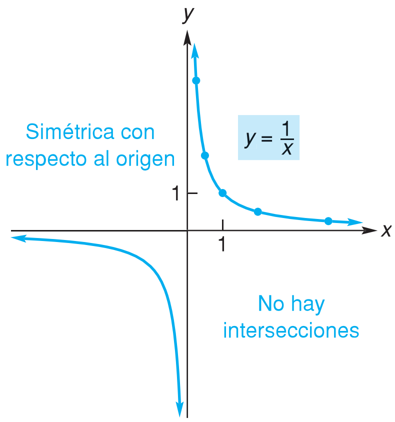
Simetría Con respecto al *eje x:* al reemplazar y por $-y$ en $y = 1/x$ se obtiene

$$-y = \frac{1}{x} \quad \text{o} \quad y = -\frac{1}{x},$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Por tanto, la gráfica *no es* simétrica con respecto al eje x.

Con respecto al *eje y:* al reemplazar x por $-x$ en $y = 1/x$ se obtiene

$$y = \frac{1}{-x} \quad \text{o} \quad y = -\frac{1}{x},$$



x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

FIGURA 3.33 Gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$.

que no es equivalente a la ecuación dada. De este modo la gráfica *no es simétrica* con respecto al eje y.

Con el origen: al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en $y = 1/x$, se obtiene

$$-y = \frac{1}{-x} \quad \text{o} \quad y = \frac{1}{x},$$

que es equivalente a la ecuación dada. Así, podemos afirmar que la gráfica *sí es* simétrica con respecto al origen.

Intersecciones Como x no puede ser cero, la gráfica no tiene intersecciones con el eje y. Si y es 0, entonces $0 = 1/x$, pero esta ecuación no tiene solución. Por tanto, no existen intersecciones con el eje x.

Discusión Puesto que no existen intersecciones, la gráfica no puede intersecar a ninguno de los ejes. Si $x > 0$, sólo obtenemos puntos en el primer cuadrante. La figura 3.33 muestra la parte de la gráfica en el cuadrante I. Por simetría, reflejamos esa parte con respecto al origen para obtener toda la gráfica.

■ **EJEMPLO 3 Graficación con intersecciones y simetría**

Probar por la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen para $y = f(x) = 1 - x^4$. Después encontrar las intersecciones y hacer el bosquejo de la gráfica.

Solución:

Simetría *Con el eje x:* al reemplazar y por $-y$ en $y = 1 - x^4$ se obtiene

$$-y = 1 - x^4 \quad \text{o} \quad y = -1 + x^4,$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Así, la gráfica *no es* simétrica con respecto al eje x.

Con el eje y: al reemplazar x por $-x$ en $y = 1 - x^4$ se obtiene

$$y = 1 - (-x)^4 \quad \text{o} \quad y = 1 - x^4,$$

que sí es equivalente a la ecuación dada. De este modo afirmamos que la gráfica *sí es* simétrica con respecto al eje y.

Con el origen: al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en $y = 1 - x^4$ se obtiene

$$-y = 1 - (-x)^4, \qquad -y = 1 - x^4, \qquad y = -1 + x^4,$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Así, la gráfica *no es* simétrica con respecto al origen.

Intersecciones Para examinar las intersecciones con el eje x *hacemos* $y = 0$ en $y = 1 - x^4$. Entonces

$$\begin{aligned} 1 - x^4 &= 0, \\ (1 - x^2)(1 + x^2) &= 0, \\ (1 - x)(1 + x)(1 + x^2) &= 0, \\ x = 1 \quad &\text{o} \quad x = -1. \end{aligned}$$

Por tanto, las intersecciones x son $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Para examinar las intersecciones y, hacemos $x = 0$. Entonces $y = 1$, de modo que $(0, 1)$ es la única intersección y.

Discusión Si se grafican las intersecciones y algunos puntos (x, y) a la derecha del eje y, podemos hacer el bosquejo de *toda* la gráfica utilizando la simetría con respecto al eje y (véase la fig. 3.34).

x	y
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{16}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{175}{256}$
1	0
$\frac{3}{2}$	$-\frac{65}{16}$

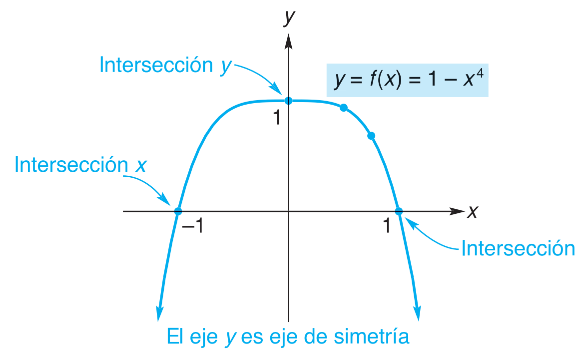


FIGURA 3.34 Gráfica de $y = 1 - x^4$.

En el ejemplo 3 mostramos que la gráfica de $y = f(x) = 1 - x^4$ no tiene simetría respecto al eje x. Con la excepción de la función constante $f(x) = 0$, *la gráfica de cualquier **función** $y = f(x)$ no puede ser simétrica con respecto al eje x,* ya que tal simetría implica dos valores de y para el mismo valor de x, lo cual viola la definición de función.

EJEMPLO 4 Graficación con intersecciones y simetría

Para la gráfica $4x^2 + 9y^2 = 36$, probar *por las intersecciones y simetrías. Hacer el bosquejo de la gráfica.*

Solución:

Intersecciones Si $y = 0$, entonces $4x^2 = 36$, de esta manera $x = \pm 3$. Por tanto, las intersecciones con el eje x son $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Si $x = 0$, entonces $9y^2 = 36$ y de esta manera, $y = \pm 2$. Por tanto, las intersecciones con el eje y son $(0, 2)$ y $(0, -2)$.

Simetría *Con el eje x:* al reemplazar y por $-y$ en $4x^2 + 9y^2 = 36$ se obtiene

$$4x^2 + 9(-y)^2 = 36, \quad \text{o} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36.$$

Ya que obtenemos la ecuación original, afirmamos que existe simetría con respecto al eje x.

Con el eje y: al reemplazar x por $-x$ en $4x^2 + 9y^2 = 36$ se obtiene

$$4(-x)^2 + 9y^2 = 36, \quad \text{o} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36.$$

Otra vez obtenemos la ecuación original, de modo que también existe simetría con respecto al eje y.

Con el origen: al reemplazar x por x y y por $-y$ en $4x^2 + 9y^2 = 36$ se obtiene

$$4(-x)^2 + 9(-y)^2 = 36, \quad \text{o} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36.$$

Ya que ésta es la ecuación original, la gráfica también es simétrica con respecto al origen.

Discusión En la figura 3.35 se grafican las intersecciones y algunos puntos en el primer cuadrante. Después los puntos se unen por medio de una curva suave.

Los puntos del cuarto cuadrante se obtienen por simetría con respecto al eje x. Después, por simetría con respecto al eje y, se determina toda la gráfica. Existen otras formas de graficar la ecuación utilizando la simetría. Por ejemplo, después de graficar las intersecciones y algunos puntos en el primer cuadrante, por simetría con respecto al origen podemos obtener el tercer cuadrante. Por simetría con respecto al eje x (o al eje y) podemos obtener la gráfica completa.

x	y
± 3	0
0	± 2
1	$\frac{4\sqrt{2}}{3}$
2	$\frac{2\sqrt{5}}{3}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{\sqrt{11}}{3}$

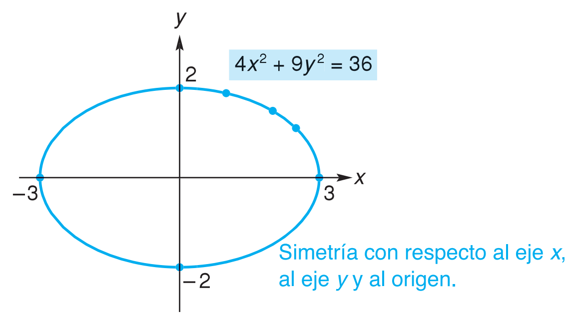


FIGURA 3.35 Gráfica de $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Este conocimiento nos puede ayudar a ahorrar tiempo al verificar las simetrías.

En el ejemplo 4 la gráfica es simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen. Con base en ella puede mostrarse que **para cualquier gráfica, si existen dos de los tres tipos de simetría, entonces el tipo restante también debe existir.**

Ejercicio 3.5

En los problemas del 1 al 16 determine las intersecciones con el eje x y con el eje y de las gráficas de las ecuaciones. También, pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen. No haga el bosquejo de las gráficas.

1. $y = 5x$.

2. $y = f(x) = x^2 - 4$.

3. $2x^2 + y^2x^4 = 8 - y$.

4. $x = y^3$.

5. $9x^2 - 4y^2 = 36$.

6. $y = 7$.

7. $x = -2$.

8. $y = |2x| - 2$.

9. $x = -y^{-4}$.

10. $y = \sqrt{x^2 - 25}$.

11. $x - 4y - y^2 + 21 = 0$.

12. $x^3 + xy + y^2 = 0$.

13. $y = f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 5}$.

14. $x^2 + xy + y^2 = 0$.

15. $y = \dfrac{3}{x^3 + 8}$.

16. $y = \dfrac{x^4}{x + y}$.

En los problemas del 17 al 24 determine las intersecciones con el eje x y con el eje y de las gráficas de las ecuaciones. También, pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen. Después haga el bosquejo de las gráficas.

17. $2x + y^2 = 4$.

18. $x = y^4$.

19. $y = f(x) = x^3 - 4x$.

20. $3y = 5x - x^3$.

21. $|x| - |y| = 0$.

22. $x^2 + y^2 = 16$.

23. $4x^2 + y^2 = 16$.

24. $x^2 - y^2 = 1$.

25. Pruebe que la gráfica de $y = f(x) = 2 - 0.03x^2 - x^4$ es simétrica con respecto al eje y y después grafique la función. (a) Haga uso de la simetría en donde sea posible para encontrar todas las intersecciones. Determine (b) el valor máximo de $f(x)$, y (c) el rango de f. Redondee todos los valores a dos decimales.

26. Pruebe que la gráfica de $y = f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 5$ es simétrica con respecto al eje y y después grafique la función. Determine todos los ceros reales de f. Redondee sus respuestas a dos decimales.

OBJETIVO Familiarizarse con las formas de las gráficas de seis funciones básicas, y considerar la traslación, la reflexión y el alargamiento y contracción verticales de la gráfica de una función.

3.6 TRASLACIONES Y REFLEXIONES

Hasta ahora nuestro enfoque para graficar se ha basado en la graficación de puntos y en el uso de cualquier simetría que exista. Pero esta técnica no es necesariamente la preferida. Más adelante analizaremos gráficas utilizando otras técnicas. Sin embargo, como algunas funciones y sus gráficas asociadas aparecen con mucha frecuencia, para propósitos ilustrativos, encontramos útil memorizarlas. La figura 3.36 muestra seis de tales funciones.

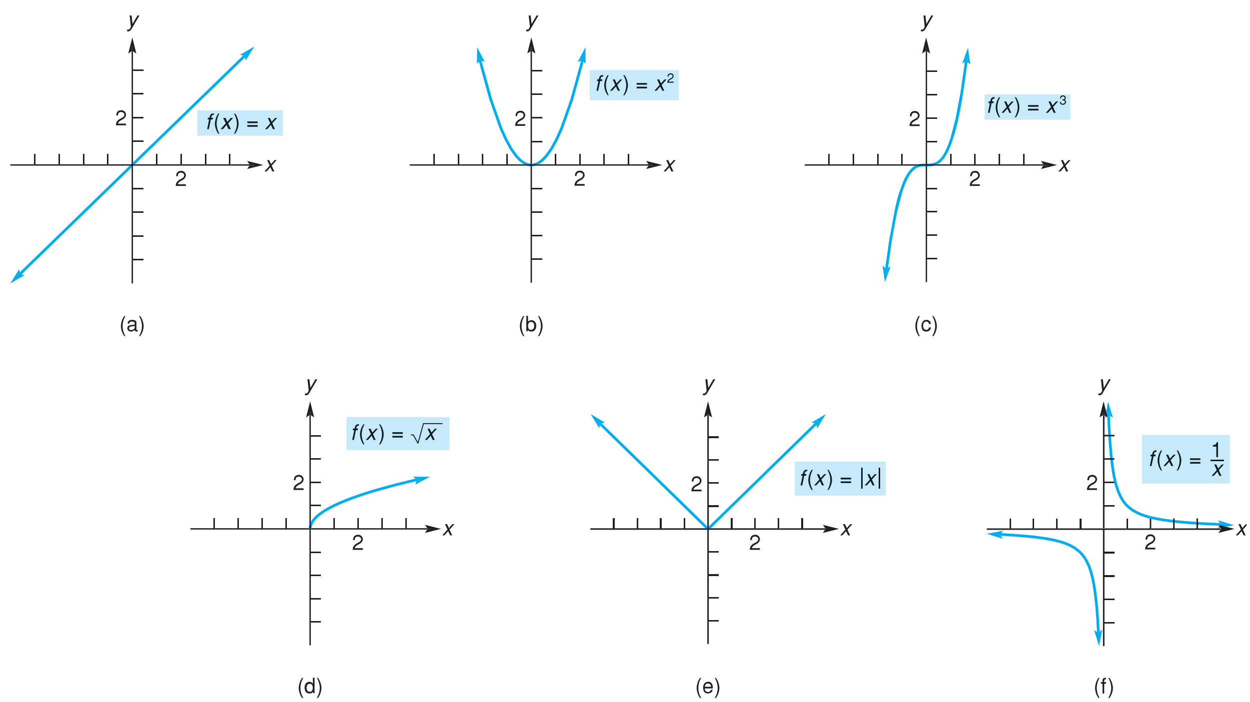


FIGURA 3.36 Funciones utilizadas con frecuencia.

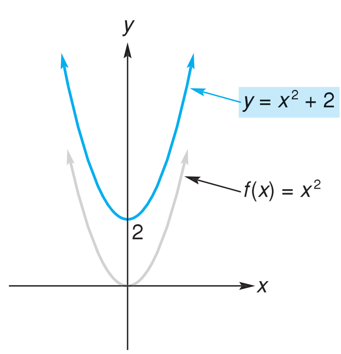


FIGURA 3.37 Gráfica de $y = x^2 + 2$.

A veces, al modificar una función mediante una manipulación *algebraica*, la gráfica de la nueva función puede obtenerse a partir de la gráfica de la función original realizando una manipulación *geométrica*. Por ejemplo, podemos utilizar la gráfica de $f(x)=x^2$ para graficar $y=x^2+2$. Observe que $y=f(x)+2$. Por tanto, para cada x, la ordenada correspondiente para la gráfica de $y=x^2+2$, es 2 unidades mayor que la ordenada para la gráfica de $f(x)=x^2$. Esto significa que la gráfica de $y=x^2+2$ es la gráfica de $f(x)=x^2$ desplazada o *trasladada*, 2 unidades hacia arriba (véase la fig. 3.37). Decimos que la gráfica de $y=x^2+2$ es una *transformación* de la gráfica de $f(x)=x^2$. La tabla 3.2 presenta una lista de los tipos básicos de transformaciones.

EJEMPLO 1 Traslación horizontal

Hacer el bosquejo de la gráfica de $y = (x-1)^3$.

Solución: observamos que $(x-1)^3$ es x^3 *con* x reemplazada por $x-1$. Por tanto, si $f(x) = x^3$, entonces $y = (x-1)^3 = f(x-1)$, que tiene la forma $f(x-c)$, donde $c = 1$. De la tabla 3.2, la gráfica de $y = (x-1)^3$ es la gráfica de $f(x) = x^3$ desplazada una unidad a la derecha (véase la fig. 3.38).

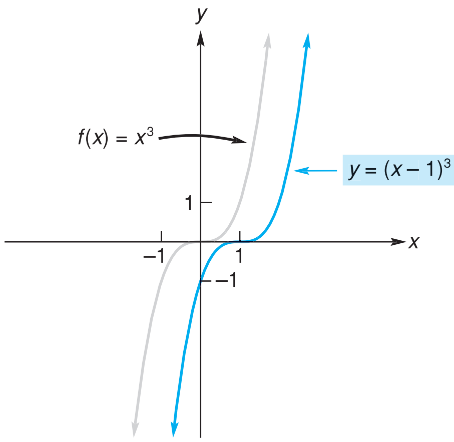


FIGURA 3.38 Gráfica de $y = (x - 1)^3$.

TABLA 3.2 Transformaciones, $c > 0$

Ecuación	Cómo transformar la gráfica de $y = f(x)$ para obtener la gráfica de la ecuación
1. $y = f(x) + c$	Desplazar c unidades hacia arriba
2. $y = f(x) - c$	Desplazar c unidades hacia abajo
3. $y = f(x - c)$	Desplazar c unidades hacia la derecha
4. $y = f(x + c)$	Desplazar c unidades hacia la izquierda
5. $y = -f(x)$	Reflejar con respecto al eje x
6. $y = f(-x)$	Reflejar con respecto al eje y
7. $y = cf(x), c > 1$	Alargar verticalmente alejándose del eje x por un factor de c
8. $y = cf(x), c < 1$	Contraer verticalmente hacia el eje x por un factor de c

EJEMPLO 2 Contracción y reflexión

Hacer el bosquejo de la gráfica de $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

Solución: podemos resolver este problema en dos pasos. Primero, observe que $\frac{1}{2}\sqrt{x}$ es $\sqrt{x}$ multiplicada por $\frac{1}{2}$. Así, si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $\frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{1}{2}f(x)$, que tiene la forma $cf(x)$, con $c = \frac{1}{2}$. De modo que la gráfica de $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ es la gráfica de f comprimida verticalmente hacia el eje x por un factor de $\frac{1}{2}$ (transformación 8, tabla 3.2; véase la fig. 3.39). Segundo, el signo menos en $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ provoca una reflexión en la gráfica de $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ con respecto al eje x (transformación 5, tabla 3.2; véase la fig. 3.39).

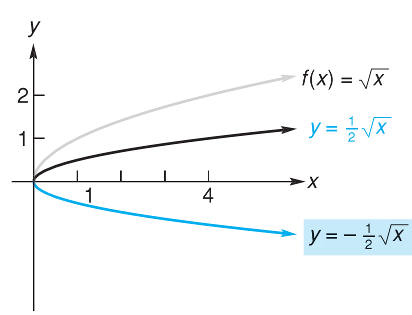


FIGURA 3.39 Para graficar $y = -\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$, comprima $y = \sqrt{x}$ y refleje el resultado con respecto al eje x.

Ejercicio 3.6

En los problemas del 1 al 12 utilice las gráficas de las funciones de la figura 3.36 y las técnicas de transformación, para graficar las funciones dadas.

1. $y = x^2 - 2$. **2.** $y = -x^2$. **3.** $y = \dfrac{1}{x-2}$. **4.** $y = \sqrt{x+2}$.

5. $y = \dfrac{2}{3x}$. **6.** $y = |x| + 1$. **7.** $y = |x+1| - 2$. **8.** $y = -\frac{1}{2}x^3$.

9. $y = 1 - (x-1)^2$. **10.** $y = (x-1)^2 + 1$. **11.** $y = \sqrt{-x}$. **12.** $y = \dfrac{5}{2-x}$.

En los problemas del 13 al 16 describa qué debe hacerse a la gráfica de $y = f(x)$ para obtener la gráfica de la ecuación dada.

13. $y = f(x-4) + 3$. **14.** $y = f(x+3) - 4$. **15.** $y = f(-x) - 5$. **16.** $y = -f(x+3)$.

17. Grafique la función $y = \sqrt[3]{x} + k$ para $k = 0, 1, 2, 3, -1, -2$ y -3. Observe las traslaciones verticales comparadas con la primera gráfica.

18. Grafique la función $y = \sqrt[3]{x+k}$ para $k = 0, 1, 2, 3, -1, -2$ y -3. Observe las traslaciones horizontales comparadas con la primera gráfica.

19. Grafique la función $y = k\sqrt[3]{x}$ para $= 1, 2, \frac{1}{2}$ y 3. Observe el alargamiento y la contracción verticales comparadas con la primera gráfica. Grafique la función para $k = -2$. Observe que la gráfica es la misma que la obtenida por medio de un alargamiento, en un factor de 2, de la reflexión de $y = \sqrt[3]{x}$ con respecto al eje x.

3.7 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 3.1 función dominio rango variable independiente variable dependiente $f(x)$ valor funcional cociente de diferencia, $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ función de demanda función de oferta

Sección 3.2 función constante función polinomial función lineal función cuadrática función definida por partes valor absoluto $|x|$ factorial $r!$ función racional

Sección 3.3 $f + g$ $f - g$ fg f/g $f \circ g$ composición de funciones

Sección 3.4 sistema de coordenadas rectangulares ejes de coordenadas origen plano x,y par ordenado (x, y) coordenadas de un punto coordenada x coordenada y abscisa ordenada cuadrante gráfica de una ecuación intersección x intersección y gráfica de una función eje de valores de la función ceros de una función prueba de la recta vertical

Sección 3.5 simetría con respecto al eje x simetría con respecto al eje y simetría con respecto al origen

Resumen

Una función f es una regla de correspondencia que asigna exactamente un número de salida $f(x)$ a cada número de entrada x. Por lo regular, una función se especifica por medio de una ecuación que indica lo que debe hacerse a una entrada x para obtener $f(x)$. Para obtener un valor particular $f(a)$ de la función, reemplazamos cada x en la ecuación por a.

El dominio de una función consiste en todos los números de entrada, y el rango consiste en todos los números de salida. A menos que se diga lo contrario, el dominio de f consiste en todos los números reales x para los cuales $f(x)$ también es un número real.

Algunos tipos especiales de funciones son: funciones constantes, funciones polinomiales y funciones racionales. Una función que está definida por medio de más de una expresión se denomina función definida por partes.

En economía, las funciones de oferta y las funciones de demanda dan una correspondencia entre el precio p de un producto y el número de unidades q del producto, que los productores (o consumidores) ofrecerán (o comprarán) a ese precio.

Dos funciones f y g pueden combinarse para formar una suma, diferencia, producto, cociente o composición como sigue:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x),$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Un sistema de coordenadas rectangulares nos permite representar de manera geométrica ecuaciones en dos variables, así como funciones. La gráfica de una ecuación en x y y consiste en todos los puntos (x, y) que corresponden a las soluciones de la ecuación. Para obtenerla trazamos un número suficiente de puntos y los conectamos (en donde sea apropiado), de modo que la forma básica de la gráfica sea visible. Los puntos en donde la gráfica interseca al eje x y al eje y se denominan intersección x e intersección y, respectivamente. Una intersección x se encuentra al hacer y igual a cero y resolver para x; una intersección y se encuentra al hacer x igual a cero y resolver para y.

La gráfica de una función f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ y consiste en todos los puntos $(x, f(x))$ tales que x está en el dominio de f. Los ceros de f son los valores de x para los cuales $f(x) = 0$. Con base en la gráfica de una función, es fácil determinar el dominio y el rango.

Para verificar que una gráfica representa a una función utilizamos la prueba de la recta vertical. Una recta vertical no puede cortar a la gráfica de una función en más de un punto.

Cuando la gráfica de una ecuación tiene simetría, el efecto *de imagen de espejo* nos permite bosquejar la gráfica con menos puntos que de otra forma serían necesarios. Las pruebas para simetría son las siguientes:

Simetría con respecto al eje x	Reemplace y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al eje y	Reemplace x por $-x$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al origen	Reemplace x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.

Algunas veces la gráfica de una función puede obtenerse a partir de una función conocida, por medio de un desplazamiento vertical hacia arriba o hacia abajo, un desplazamiento horizontal hacia la derecha o hacia la izquierda, una reflexión con respecto al eje x o al eje y, o bien un alargamiento o una contracción vertical en dirección del eje x. Tales transformaciones están indicadas en la tabla 3.2 de la sección 3.6.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color se sugiere utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 6 proporcione el dominio de cada función.

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$.

2. $g(x) = x^2 - 6|x|$.

3. $F(t) = 7t + 4t^2$.

4. $G(x) = 18$.

5. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.

6. $H(s) = \dfrac{\sqrt{s-5}}{4}$.

En los problemas del 7 al 14 determine los valores funcionales para la función dada.

7. $f(x) = 3x^2 - 4x + 7$; $f(0), f(-3), f(5), f(t)$.

8. $g(x) = 4$; $g(4), g(\frac{1}{100}), g(-156), g(x+4)$.

9. $G(x) = \sqrt{x-1}$; $G(1), G(5), G(t+1), G(x^3)$.

10. $F(x) = \dfrac{x-3}{x+4}$; $F(-1), F(0), F(5), F(x+3)$.

11. $h(u) = \dfrac{\sqrt{u+4}}{u}$; $h(5), h(-4), h(x), h(u-4)$.

12. $H(s) = \dfrac{(s-4)^2}{3}$; $H(-2), H(7), H(\frac{1}{2}), H(x^2)$.

13. $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x < 2 \\ 8 - x^2, & \text{si } x > 2; \end{cases}$

$f(4), f(-2), f(0), f(10)$.

14. $h(q) = \begin{cases} q, & \text{si } -1 \le q < 0 \\ 3 - q, & \text{si } 0 \le q < 3; \\ 2q^2, & \text{si } 3 \le q \le 5 \end{cases}$

$h(0), h(4), h(-\frac{1}{2}), h(\frac{1}{2})$.

En los problemas del 15 al 18 determine (a) $f(x+h)$ y (b) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$; simplifique sus respuestas.

15. $f(x) = 3 - 7x$.

16. $f(x) = 11x^2 + 4$.

17. $f(x) = 4x^2 + 2x - 5$.

18. $f(x) = \dfrac{7}{x+1}$.

19. Si $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = 2x + 3$, determine lo siguiente:

a. $(f + g)(x)$. **b.** $(f + g)(4)$. **c.** $(f - g)(x)$.

d. $(fg)(x)$. **e.** $(fg)(1)$. **f.** $\frac{f}{g}(x)$.

g. $(f \circ g)(x)$. **h.** $(f \circ g)(5)$. **i.** $(g \circ f)(x)$.

20. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x + 1$, determine lo siguiente:

a. $(f + g)(x)$. **b.** $(f - g)(x)$. **c.** $(f - g)(-3)$.

d. $(fg)(x)$. **e.** $\frac{f}{g}(x)$. **f.** $\frac{f}{g}(2)$.

g. $(f \circ g)(x)$. **h.** $(g \circ f)(x)$. **i.** $(g \circ f)(-4)$.

En los problemas del 21 al 24 determine $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

21. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x - 1$.

22. $f(x) = \frac{x + 1}{4}$, $g(x) = \sqrt{x}$.

23. $f(x) = \sqrt{x + 2}$, $g(x) = x^3$.

24. $f(x) = 2$, $g(x) = 3$.

En los problemas 25 y 26 encuentre las intersecciones de la gráfica de cada ecuación, y examine la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen. No haga un bosquejo de las gráficas.

25. $y = 2x - 3x^3$.

26. $\frac{xy^2}{x^2 + 1} = 4$.

En los problemas 27 y 28 encuentre las intersecciones con el eje x y con el eje y de la gráfica de cada ecuación. También examine la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen. Después haga un bosquejo de las gráficas.

27. $y = 9 - x^2$.

28. $y = 3x - 7$.

En los problemas del 29 al 32 haga la gráfica de cada función y proporcione su dominio y rango. También determine las intersecciones.

29. $G(u) = \sqrt{u + 4}$.

30. $f(x) = |x| + 1$.

31. $y = g(t) = \frac{2}{|t - 4|}$.

32. $g(t) = \sqrt[4]{t}$

---

33. Grafique la siguiente función definida por partes y dé su dominio y rango:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } x \leq 0, \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

34. Utilice la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ para hacer un bosquejo de la gráfica de $y = \sqrt{x - 2} - 1$.

35. Utilice la gráfica de $f(x) = x^2$ para hacer un bosquejo de la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

36. **Ecuación de tendencia** Las ventas anuales proyectadas (en dólares) de un producto nuevo están dadas por la ecuación $S = 150{,}000 + 3000t$, en donde t es el tiempo en años, contados a partir de 2001. Tal ecuación se denomina *ecuación de tendencia*. Determine las ventas anuales proyectadas para 2006. ¿Es S una función de t?

37. En la figura 3.40, ¿cuáles gráficas representan funciones de x?

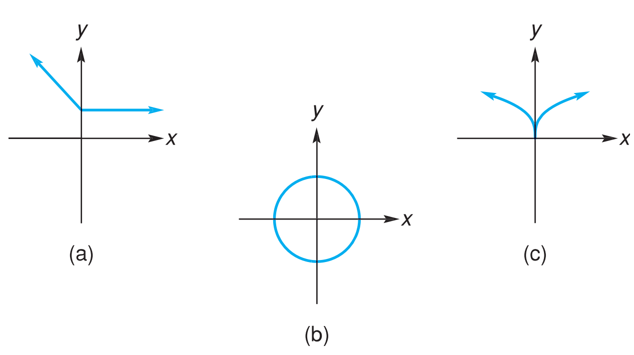


FIGURA 3.40 Diagrama para el problema 37.

38. Si $f(x) = (4x^{2.3} - 3x^3 + 7)^5$, determine (a) $f(2)$ y (b) $f(2.3)$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

39. Encuentre todas las raíces reales de la ecuación

$$5x^3 - 7x^2 = 4x - 2.$$

Redondee sus respuestas a dos decimales.

40. Encuentre todas las raíces reales de la ecuación

$$x^4 - 4x^3 = (2x - 1)^2.$$

Redondee sus respuestas a dos decimales.

41. Determine todos los ceros reales de

$$f(x) = x(2.1x^2 - 3)^2 - x^3 + 1.$$

Redondee sus respuestas a dos decimales.

42. Determine el rango de

$$f(x) = \begin{cases} -2.5x - 4, & \text{si } x < 0, \\ 6 + 4.1x - x^2, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

43. Con base en la gráfica de $f(x) = -x^3 + 0.04x + 7$, encuentre (a) el rango y (b) las intersecciones. Redondee los valores a dos decimales.

44. Con base en la gráfica de $f(x) = \sqrt{x + 3}(x^2 - 1)$, encuentre (a) el valor mínimo de $f(x)$, (b) el rango de f y (c) todos los ceros reales de f. Redondee los valores a dos decimales.

45. Grafique $y = f(x) = x^3 + x^k$, para $k = 0, 1, 2, 3$ y 4. ¿Para cuáles valores de k la gráfica tiene (a) simetría con respecto al eje y, (b) simetría con respecto al origen?

Aplicación práctica

Una experiencia con los impuestos

Quizá haya escuchado el viejo dicho: "Sólo existen dos cosas seguras en la vida, la muerte y los impuestos". Aquí veremos cómo podemos aplicar las funciones a una de estas "verdades", a saber, los impuestos.

Se utilizará la tasa de impuesto federal de 2000 de Estados Unidos, para una pareja casada que presenta una declaración conjunta. Suponga que usted quiere determinar una fórmula para la función f, tal que $f(x)$ es el impuesto en dólares sobre un ingreso gravable de x dólares. El impuesto está basado en varios rangos de ingreso gravable. De acuerdo con la tabla Y-1 del Servicio Interno de Recaudación (IRS, por sus siglas en inglés; véase la fig. 3.41):

- Si x es $0 o menor, el impuesto es $0.
- Si x es mayor a $0, pero no mayor a $43,850, el impuesto es 15% de x.
- Si x es mayor a $43,850, pero no mayor a $105,950, el impuesto es $6,577.50 más 28% del monto superior a $43,850.
- Si x es mayor a $105,950, pero no mayor a $161,450, el impuesto es $23,965.50 más 31% del monto superior a $105,950.
- Si x es mayor a $161,450, pero no mayor a $288,350, el impuesto es $41,170.50 más 36% del monto superior a $161,450.
- Si x es mayor a $288,350, el impuesto es $86,854.50 más 39.6% del monto superior a $288,350.

Forma Y-1 — Utilice si su estado civil es **Casado por bienes mancomunados** o **viudo(a)**

Si el monto de la forma 1040, línea 38, es *mayor a–*	*Pero no mayor a–*	Ingrese en la forma 1040, línea 39		*del monto que exceda a–*
$0	$43,850	-----------	**15%**	**$0**
43,850	105,950	**$6,577.50 +**	**28%**	**43,850**
105,950	161,450	**23,695.50 +**	**31%**	**105,950**
161,450	288,350	**41,170.50 +**	**36%**	**161,450**
288,350	-----------	**86,854.50 +**	**39.6%**	**288,350**

FIGURA 3.41 Servicio Interno de Recaudación 2000 Forma Y-1.

Es claro que si $x \leq 0$, entonces

$$f(x) = 0.$$

Si $0 < x \leq 43{,}850$, entonces

$$f(x) = 0.15x.$$

Obsérvese que el impuesto sobre el ingreso gravable de $43,850 es

$$f(43{,}850) = 0.15(43{,}850) = 6{,}577.50.$$

Si $43{,}850 < x \leq 105{,}950$, entonces el monto por encima de 43,850 es $x - 43{,}850$, de modo que

$$f(x) = 6{,}577.50 + 0.28(x - 43{,}850).$$

Como 6,577.50 es 15% de 43,850, para un ingreso gravable entre $43,850 y $105,950, en esencia, usted paga impuesto a la tasa de 15% por los primeros $43,850 de ingreso y a la tasa de 28% por el ingreso restante. Obsérvese que el impuesto sobre $105,950 es

$$\begin{aligned} f(105{,}950) &= 6{,}577.50 + 0.28(105{,}950 - 43{,}850) \\ &= 6{,}577.50 + 0.28(62{,}100) \\ &= 6{,}577.50 + 17{,}388 = 23{,}965.50. \end{aligned}$$

Si $105{,}950 < x \leq 161{,}450$, entonces la cantidad que excede a 105,950 es $x - 105{,}950$, de modo que

$$f(x) = 23{,}965.50 + 0.31(x - 105{,}950).$$

Ya que $23,965.50 es el impuesto sobre $105,950, para un ingreso gravable entre $105,950 y $161,450, usted está pagando impuestos a la tasa de 15% por los primeros $43,850 de ingreso, a la tasa de 28% por los siguientes $62,100 de ingreso $(105{,}950 - 43{,}850 = 62{,}100)$, y a la tasa de 31% por el ingreso restante. Nótese que el impuesto sobre $161,450 es

$$\begin{aligned} f(161{,}450) &= 23{,}965.50 + 0.31(161{,}450 - 105{,}950) \\ &= 23{,}965.50 + 0.31(55{,}500) \\ &= 23{,}965.50 + 17{,}205 \\ &= 41{,}170.50. \end{aligned}$$

Si $161{,}450 < x \leq 288{,}350$, entonces el monto que excede a 161,450 es $x - 161{,}450$, de modo que

$$f(x) = 41{,}170.50 + 0.36(x - 161{,}450).$$

Ya que \$41,170.50 es el impuesto sobre \$161,450, para un ingreso gravable entre \$161,450 y \$288,350, usted está pagando impuestos a una tasa de 15% por los primeros \$43,850 de ingreso, a la tasa de 28% por los siguientes \$62,100 de ingreso, a la tasa de 31% por los siguientes \$55,500 de ingreso ($161{,}450 - 105{,}950 = 55{,}500$) y a la tasa de 36% por el ingreso restante. Obsérvese que el impuesto sobre \$288,350 es

$$\begin{aligned} f(288{,}350) &= 41{,}170.50 + 0.36(288{,}350 - 161{,}450) \\ &= 41{,}170.50 + 0.36(126{,}900) \\ &= 41{,}170.50 + 45{,}684 = 86{,}854.50. \end{aligned}$$

Si $x > 288{,}350$, entonces el monto sobre 288,350 es $x - 288{,}350$, de modo que

$$f(x) = 86{,}854.50 + 0.396(x - 288{,}350).$$

Como \$86,854.50 es el impuesto sobre \$288,350, para un ingreso gravable superior a \$288,350, usted está pagando impuesto a una tasa de 15% por los primeros \$43,850 de ingreso, a la tasa de 28% por los siguientes \$62,100 de ingreso, a la tasa de 31% por los siguientes \$55,500 de ingreso, a la tasa de 36% por los siguientes \$126,900 de ingreso y a la tasa de 39.6% por el ingreso restante.

Al resumir todos estos resultados obtenemos la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ 0.15x, & \text{si } 0 < x \leq 43{,}850, \\ 6{,}577.50 + 0.28(x - 43{,}850), & \\ \quad \text{si } 43{,}850 < x \leq 105{,}950, & \\ 23{,}965.50 + 0.31(x - 105{,}950), & \\ \quad \text{si } 105{,}950 < x \leq 161{,}450, & \\ 41{,}170.50 + 0.36(x - 161{,}450), & \\ \quad \text{si } 161{,}450 < x \leq 288{,}350, & \\ 86{,}854.50 + 0.396(x - 288{,}350), & \\ \quad \text{si } x > 288{,}350. & \end{cases}$$

Con estas fórmulas, usted puede representar geométricamente la función de impuesto al ingreso, como en la figura 3.42.

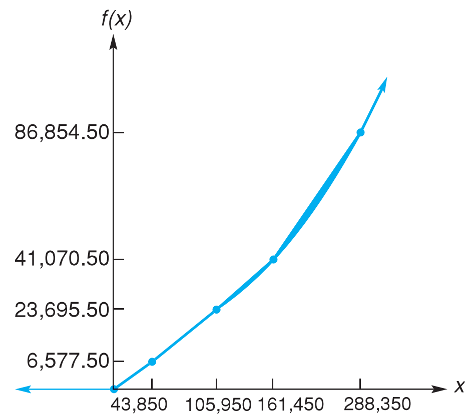


FIGURA 3.42 Función de impuesto al ingreso.

Ejercicios

Utilice la función de impuesto al ingreso f anterior, para determinar el impuesto sobre el ingreso gravable en el año 2000.

1. \$120,000.
2. \$35,350.
3. \$290,000.
4. \$162,700.

5. Busque la forma Y-1 más reciente en `www.irs.gov` (Inst 1040 Tax Tables) y repita los problemas 1 a 4 utilizando esa información.

6. ¿Por qué fue significativo que $f(105{,}950) = \$23{,}965.50$, $f(161{,}450) = \$41{,}170.50$, etcétera?