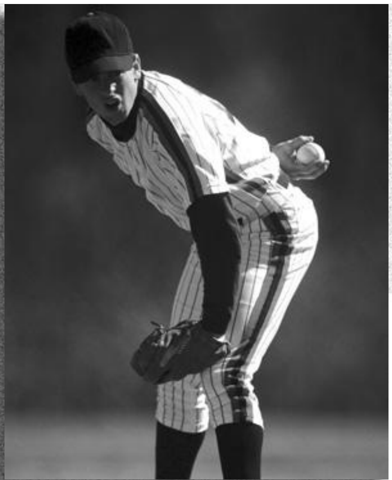


CAPÍTULO 2

Aplicaciones de ecuaciones y desigualdades

En este capítulo aplicaremos las ecuaciones a situaciones cotidianas. Después haremos lo mismo con las desigualdades, que son proposiciones en que una cantidad es mayor, menor, no mayor o no menor que otra cantidad.

Una aplicación de las desigualdades es la regulación de equipo deportivo. En un juego común de las ligas mayores, se utilizan algunas docenas de pelotas de béisbol y no sería lógico esperar que todas pesasen exactamente $5\frac{1}{8}$ onzas. Pero es razonable pedir que cada una pese no menos de 5 onzas ni más de $5\frac{1}{4}$ onzas, que es como se lee en las reglas oficiales (`www.majorleaguebaseball.com`).

Otra desigualdad se aplica para el caso de los veleros utilizados en las carreras de la Copa América, la cual se efectúa cada tres o cuatro años (la siguiente es en 2003). La International America's Cup Class (IACC) da la siguiente regla de definición para yates:

$$\frac{L + 1.25\sqrt{S} - 9.8\sqrt[3]{DSP}}{0.679} \leq 24.000 \text{ m.}$$

El símbolo "$\leq$" significa que la expresión del lado izquierdo debe ser menor o igual a los 24 m del lado derecho. L, S y DSP también están especificadas por complicadas fórmulas, pero aproximadamente, L es la longitud, S es el área del velamen y DSP es el desplazamiento (el volumen del casco bajo la línea de flotación).

La fórmula IACC proporciona a los diseñadores de yates un poco de flexibilidad. Supóngase que un yate tiene $L = 20.2$ m, $S = 282$ m^3 y $DSP = 16.4$ m^3. Como la fórmula es una desigualdad, el diseñador podría reducir el área del velamen mientras deja sin cambios la longitud y el desplazamiento. Sin embargo, por lo común, los valores de L, S y DSP se utilizan para que hagan que la expresión de lado izquierdo quede tan cercana como sea posible a 24 m.

Además de analizar aplicaciones de ecuaciones y desigualdades lineales, en este capítulo se revisará el concepto de valor absoluto.

OBJETIVO Modelar situaciones que se describen por medio de ecuaciones lineales o cuadráticas.

2.1 APLICACIONES DE ECUACIONES

En la mayoría de los casos, para resolver problemas prácticos, las relaciones establecidas deben traducirse a símbolos matemáticos. Esto se conoce como *modelado.* Los ejemplos siguientes nos ilustran las técnicas y conceptos básicos. Examine cada uno de ellos con mucho cuidado antes de pasar a los ejercicios.

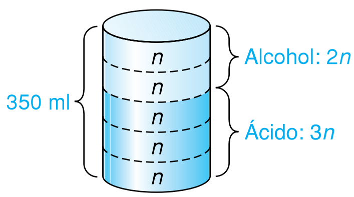


FIGURA 2.1 Solución química (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Mezcla

Un químico debe preparar 350 ml *de una solución compuesta por* 2 *partes de alcohol y* 3 *de ácido. ¿Cuánto debe utilizar de cada una?*

Solución: sea n el número de mililitros de cada parte. La figura 2.1 muestra la situación. A partir del diagrama tenemos

$$\begin{aligned} 2n + 3n &= 350, \\ 5n &= 350, \\ n &= \frac{350}{5} = 70. \end{aligned}$$

Observe que la solución de una ecuación no necesariamente es la solución del problema propuesto.

Pero $n = 70$ *no* es la respuesta al problema original. Cada *parte* tiene 70 ml. La cantidad de alcohol es $2n = 2(70) = 140$, y la cantidad de ácido es $3n = 3(70) = 210$. Así, el químico debe utilizar 140 ml de alcohol y 210 ml de ácido. Este ejemplo muestra cómo nos puede ser útil un diagrama para plantear un problema dado en palabras.

EJEMPLO 2 Plataforma de observación

Se construirá una plataforma rectangular de observación que dominará un valle [véase *la fig.* 2.2 (a)]. *Sus dimensiones serán de* 6 *por* 12 m. *Un cobertizo rectangular de* 40 m^2 *de área estará en el centro de la plataforma, y la parte no cubierta será un pasillo de anchura uniforme. ¿Cuál debe ser el ancho de este pasillo?*

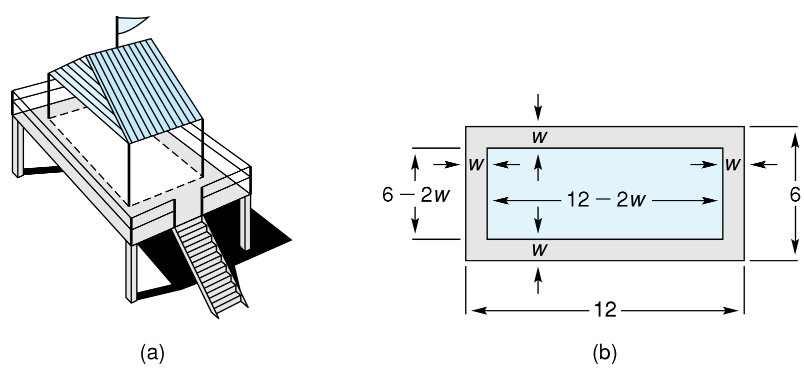


FIGURA 2.2 Pasillo en la plataforma de observación (ejemplo 2).

Solución: un diagrama de la plataforma se muestra en la figura 2.2(b). Sea w el ancho (en metros) del pasillo. Entonces, la parte destinada al cobertizo tiene dimensiones de $12 - 2w$ por $6 - 2w$, y como su área debe ser de 40 m^2, en donde área = (largo)(ancho), tenemos

$$\begin{aligned} (12 - 2w)(6 - 2w) &= 40, \\ 72 - 36w + 4w^2 &= 40 \qquad \text{(multiplicando)}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
4w^2 - 36w + 32 &= 0, \\
w^2 - 9w + 8 &= 0 \qquad \text{(dividiendo ambos lados entre 4)}, \\
(w - 8)(w - 1) &= 0, \\
w &= 8, 1.
\end{aligned}
$$

Aunque 8 es una solución de la ecuación, *no* es una solución para nuestro problema, ya que una de las dimensiones de la plataforma es de sólo 6 m. Así, la única solución posible es que el pasillo mida 1 m de ancho.

Las palabras clave que aquí se introducen son *costo fijo, costo variable, costo total, ingreso total y utilidad.* Éste es el momento para que usted adquiera familiaridad con estos términos, ya que aparecen a lo largo de todo el libro.

En el ejemplo siguiente nos referimos a algunos términos de negocios relativos a una compañía manufacturera. **Costo fijo** (*o gastos generales*) es la suma de todos los costos que son independientes del nivel de producción, como renta, seguros, etc. Este costo debe pagarse independientemente de que se produzca o no. **Costo variable** es la suma de todos los costos dependientes del nivel de producción, como salarios y materiales. **Costo total** es la suma de los costos variable y fijo:

$$\text{costo total} = \text{costo variable} + \text{costo fijo.}$$

Ingreso total es el dinero que un fabricante recibe por la venta de su producto. Está dado por:

$$\text{ingreso total} = (\text{precio por unidad})(\text{número de unidades vendidas}).$$

Utilidad (o ganancia) es el ingreso total menos el costo total:

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total.}$$

EJEMPLO 3 Utilidad

La compañía Anderson fabrica un producto para el cual el costo variable por unidad es de \$6 *y el costo fijo de* \$80,000. *Cada unidad tiene un precio de venta de* \$10. *Determine el número de unidades que deben venderse para obtener una utilidad de* \$60,000.

Solución: sea q el número de unidades que deben venderse (en muchos problemas de negocios, q representa la cantidad). Entonces, el costo variable (en dólares) es $6q$. Por tanto, el *costo total* será $6q + 80{,}000$. Y el ingreso total por la venta de q unidades es $10q$. Ya que

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total},$$

nuestro modelo para este problema es

$$60{,}000 = 10q - (6q + 80{,}000).$$

Resolviendo se obtiene

$$
\begin{aligned}
60{,}000 &= 10q - 6q - 80{,}000, \\
140{,}000 &= 4q, \\
35{,}000 &= q.
\end{aligned}
$$

Por tanto, se deben vender 35,000 unidades para obtener una ganancia de \$60,000.

EJEMPLO 4 Precios

Una fábrica produce ropa deportiva para dama y está planeando vender su nueva línea de conjuntos deportivos a detallistas. El costo para éstos será de \$33 *por conjunto. Por conveniencia del detallista, la fábrica colocará una etiqueta con el precio en cada conjunto. ¿Qué cantidad debe ser marcada en las etiquetas de modo que el detallista pueda reducir este precio en un 20% durante una liquidación y aún obtener una ganancia de 15% sobre el costo?*

Solución: aquí se usa la relación

Observe que
precio = costo + utilidad

$$\text{precio de venta} = \text{costo por conjunto} + \text{utilidad por conjunto.}$$

Sea p el precio, en dólares, por conjunto en la etiqueta. Durante la liquidación el detallista realmente recibe $p - 0.2p$. Esto debe ser igual al costo, 33, más la utilidad, (0.15)(33). De aquí que

$$\begin{aligned}
\text{precio de venta} &= \text{costo} + \text{utilidad} \\
p - 0.2p &= 33 + (0.15)(33), \\
0.8p &= 37.95, \\
p &= 47.4375.
\end{aligned}$$

Desde un punto de vista práctico, el fabricante debe marcar las etiquetas con un precio de \$47.44.

EJEMPLO 5 Inversión

Un total de \$10,000 *se invirtieron en dos empresas comerciales A y B. Al final del primer año, A y B tuvieron rendimientos de* 6 *y* $5\frac{3}{4}$%*, respectivamente, sobre las inversiones originales. ¿Cuál fue la cantidad original asignada a cada empresa, si la utilidad total fue de* \$588.75*?*

Solución: sea x la cantidad, en dólares, invertida al 6%. Entonces $10{,}000 - x$ se invirtieron al $5\frac{3}{4}$%. El interés ganado en A fue $(0.06)(x)$ y en B $(0.0575)(10{,}000 - x)$, que en total asciende a 588.75. De aquí que,

$$\begin{aligned}
(0.06)x + (0.0575)(10{,}000 - x) &= 588.75, \\
0.06x + 575 - 0.0575x &= 588.75, \\
0.0025x &= 13.75, \\
x &= 5500.
\end{aligned}$$

Así, \$5500 se invirtieron al 6%, y \$10,000 − \$5500 = \$4500 al $5\frac{3}{4}$%.

EJEMPLO 6 Redención de un bono

La mesa directiva de cierta compañía acuerda en redimir algunos de sus bonos en 2 años. En ese tiempo, se requerirán \$1,102,500*. Suponga que en este momento reservan* \$1,000,000*. ¿A qué tasa de interés anual, compuesto anualmente, se debe tener invertido este dinero a fin de que su valor futuro sea suficiente para redimir los bonos?*

Solución: sea r la tasa anual necesaria. Al final del primer año, la cantidad acumulada será \$1,000,000 más el interés $1{,}000{,}000r$ para un total de

$$1{,}000{,}000 + 1{,}000{,}000r = 1{,}000{,}000(1 + r).$$

Bajo interés compuesto, al final del segundo año la cantidad acumulada será de $1{,}000{,}000(1 + r)$ más el interés de esto, que es $1{,}000{,}000(1 + r)r$. Así, el valor total al final del segundo año será

$$1{,}000{,}000(1 + r) + 1{,}000{,}000\,(1 + r)r.$$

Esto debe ser igual a $1,102,500:

$$1{,}000{,}000(1 + r) + 1{,}000{,}000(1 + r)r = 1{,}102{,}500. \qquad (1)$$

Ya que $1{,}000{,}000(1 + r)$ es un factor común de ambos términos del miembro izquierdo, tenemos

$$\begin{aligned}
1{,}000{,}000(1 + r)(1 + r) &= 1{,}102{,}500,\\
1{,}000{,}000(1 + r)^2 &= 1{,}102{,}500,\\
(1 + r)^2 &= \frac{1{,}102{,}500}{1{,}000{,}000} = \frac{11{,}025}{10{,}000} = \frac{441}{400},\\
1 + r &= \pm\sqrt{\frac{441}{400}} = \pm\frac{21}{20},\\
r &= -1 \pm \frac{21}{20}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $r = -1 + (21/20) = 0.05$ o $r = -1 - (21/20) = -2.05$. Aunque 0.05 y -2.05 son raíces de la ecuación (1), rechazamos -2.05, ya que necesitamos que r sea positiva. Por lo que $r = 0.05$, de modo que la tasa buscada es 5%.

En ocasiones puede haber más de una manera de modelar un problema que está dado en palabras, como lo muestra el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Renta de un departamento

Una compañía de bienes raíces es propietaria del conjunto de departamentos Parklane, el cual consiste en 96 departamentos, cada uno de los cuales puede ser rentado en $550 mensuales. Sin embargo, por cada $25 mensuales de aumento en la renta, se tendrán tres departamentos desocupados sin posibilidad de que se renten. La compañía quiere recibir $54,600 mensuales de rentas. ¿Cuál debe ser la renta mensual de cada departamento?

Solución:

Método I. Suponga que r es la renta, en dólares, que se cobrará por cada departamento. Entonces el aumento sobre el nivel de $550 es $r - 550$. Así, el número de aumentos de 25 dólares es $\dfrac{r - 550}{25}$. Como cada 25 dólares de aumento causa que tres departamentos queden sin rentar, el número total de departamentos sin rentar será $3\left(\dfrac{r - 550}{25}\right)$. De aquí que el número total de departamentos rentados será $96 - 3\left(\dfrac{r - 550}{25}\right)$. Como

renta total = (renta por departamento)(número de departamentos rentados),

tenemos

$$54{,}600 = r\left[96 - \frac{3(r - 550)}{25}\right],$$

$$54{,}600 = r\left[\frac{2400 - 3r + 1650}{25}\right],$$

$$
\begin{aligned}
54{,}600 &= r\left[\frac{4050 - 3r}{25}\right] \\
1{,}365{,}000 &= r\,(4050 - 3r)
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$3r^2 - 4050r + 1{,}365{,}000 = 0.$$

Utilizando la fórmula cuadrática,

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{4050 \pm \sqrt{(-4050)^2 - 4(3)(1{,}365{,}000)}}{2(3)} \\
&= \frac{4050 \pm \sqrt{22{,}500}}{6} = \frac{4050 \pm 150}{6} = 675 \pm 25.
\end{aligned}
$$

Así, la renta para cada departamento debe ser de \$650 o \$700.

Método II. Suponga que n es el número de incrementos de \$25. Entonces el aumento en la renta por departamento será $25n$ y habrá $3n$ departamentos sin rentar. Como

renta total = (renta por departamento)(número de departamentos rentados),

tenemos

$$
\begin{aligned}
54{,}600 &= (550 + 25n)(96 - 3n), \\
54{,}600 &= 52{,}800 + 750n - 75n^2, \\
75n^2 - 750n + 1800 &= 0, \\
n^2 - 10n + 24 &= 0, \\
(n - 6)(n - 4) &= 0.
\end{aligned}
$$

Así, $n = 6$ o $n = 4$. La renta que debe cobrarse es $550 + 25(6) = \$700$ o bien $550 + 25(4) = \$650$.

Ejercicio 2.1

1. **Cercado** Una malla de alambre se colocará alrededor de un terreno rectangular de modo que el área cercada sea de 800 pies^3 y el largo del terreno sea el doble de su ancho. ¿Cuántos pies de malla se utilizarán?

2. **Geometría** El perímetro de un rectángulo es de 200 pies y su largo es tres veces el ancho. Determine las dimensiones del rectángulo.

3. **Lagarta (oruga)** Uno de los insectos defoliadores más importantes es la oruga lagarta, la cual se alimenta de plantas de sombra, de bosque y de árboles frutales. Una persona vive en un área en la que la oruga se ha convertido en un problema. Esta persona desea rociar los árboles de su propiedad antes de que ocurra una mayor defoliación. Necesita 128 onzas de una solución compuesta de 3 partes de insecticida A y 5 partes de insecticida B. Después de preparada la solución, se mezcla con agua. ¿Cuántas onzas de cada insecticida deben usarse?

4. **Mezcla de concreto** Un constructor fabrica cierto tipo de concreto, al mezclar 1 parte de cemento Portland (compuesto de cal y arcilla), 3 partes de arena y 5 partes de piedra pulverizada (en volumen). Si se necesitan 765 pies^3 de concreto, ¿cuántos pies cúbicos de cada ingrediente necesita el constructor?

5. **Acabado de muebles** De acuerdo con *The Consumer's Handbook* (Paul Fargis, ed., Nueva York, Hawthorn, 1974), un buen aceite para el acabado de muebles de madera contiene 2 partes de aceite de linaza y 1 parte

de trementina. Si usted necesita preparar una pinta (16 onzas líquidas) de este aceite, ¿cuántas onzas líquidas de trementina se necesitan?

6. **Administración de bosques** Una compañía maderera posee un bosque que tiene forma rectangular de 1×2 millas. Si se tala una franja uniforme de árboles en los extremos de este bosque, ¿cuál debe ser el ancho de la franja, si se deben conservar $\frac{3}{4}$ de millas cuadradas de bosque?

7. **Vereda de un jardín** Un terreno rectangular de 4×8 m se usa como jardín. Se decide poner una vereda en toda la orilla interior de modo que 12 m^2 del terreno se dejen para flores. ¿Cuál debe ser el ancho de la vereda?

8. **Conducto de ventilación** El diámetro de un conducto circular de ventilación es de 140 mm. Este conducto está acoplado a un conducto cuadrado como se muestra en la figura 2.3. Para asegurar un flujo suave de aire, las áreas de las secciones circular y cuadrada deben ser iguales. Calcule, al milímetro más cercano, cuál debe ser la longitud x del lado de la sección cuadrada.

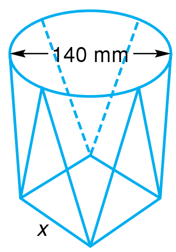
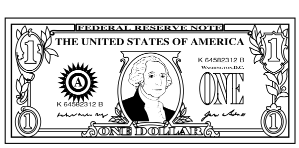


FIGURA 2.3 Conducto de ventilación (problema 8).

9. **Utilidad** Una compañía de refinación de maíz produce gluten de maíz para alimento de ganado, con un costo variable de \$76 por tonelada. Si los costos fijos son \$110,000 por mes y el alimento se vende en \$126 por tonelada, ¿cuántas toneladas deben venderse para que la compañía tenga una utilidad mensual de \$540,000?

10. **Ventas** La directiva de una compañía quiere saber cuántas unidades de su producto necesita vender para obtener una utilidad de \$100,000. Para este caso se cuenta con la siguiente información: precio de venta por unidad, \$20; costo variable por unidad, \$15; costo fijo total, \$600,000. A partir de estos datos determine las unidades que deben venderse.

11. **Inversión** Una persona desea invertir \$20,000 en dos empresas, de modo que el ingreso total por año sea de \$1440. Una empresa paga el 6% anual; la otra tiene mayor riesgo y paga un $7\frac{1}{2}$% anual. ¿Cuánto debe invertir en cada una?



12. **Inversión** Una persona invirtió \$20,000, parte a una tasa de interés de 6% anual y el resto al 7% anual. El interés total al final de un año fue equivalente a una tasa de $6\frac{3}{4}$% anual sobre el total inicial de \$20,000. ¿Cuánto se invirtió a cada tasa?

13. **Precios** El costo de un producto al menudeo es de \$3.40. Si se desea obtener una ganancia del 20% sobre el precio de venta, ¿a qué precio debe venderse el producto?

14. **Retiro de bonos** En dos años una compañía requiere de \$1,123,600 con el fin de retirar algunos bonos. Si ahora invierte \$1,000,000 con este objetivo, ¿cuál debe ser la tasa de interés, compuesta anualmente, que debe recibir sobre este capital para retirar los bonos?

15. **Programa de expansión** En dos años una compañía iniciará un programa de expansión. Tiene decidido invertir \$2,000,000 ahora, de modo que en dos años el valor total de la inversión sea de \$2,163,200, la cantidad requerida para la expansión. ¿Cuál es la tasa de interés anual, compuesta anualmente, que la compañía debe recibir para alcanzar su objetivo?

16. **Negocios** Una compañía determina que si produce y vende q unidades de un producto, el ingreso total por las ventas será $100\sqrt{q}$. Si el costo variable por unidad es de \$2 y el costo fijo de \$1200, determine los valores de q para los que

$$\text{ingreso total por ventas} = \text{costo variable} + \text{costo fijo}.$$

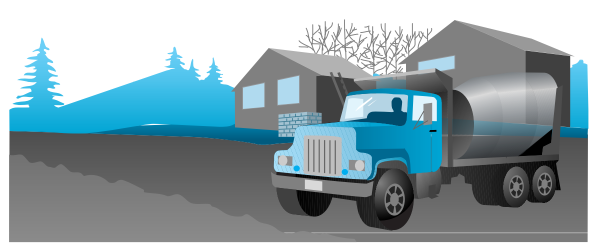
(Esto es, que la utilidad sea cero.)

17. **Alojamiento** El dormitorio de una universidad puede albergar a 210 estudiantes. Este otoño hay cuartos disponibles para 76 estudiantes de nuevo ingreso. En promedio un 95% de aquellos estudiantes de nuevo ingreso que hicieron una solicitud realmente reservan un cuarto. ¿Cuántas solicitudes de cuartos debe distribuir el colegio si quiere recibir 76 reservaciones?

18. **Encuestas** Un grupo de personas fue encuestado y el 20%, o 700, de ellas favoreció a un nuevo producto sobre la marca de mayor venta. ¿Cuántas personas fueron encuestadas?

19. **Salario de una celadora** Se reportó que en cierta prisión para mujeres, el salario de las celadoras era 30%menor (\$200 menos) por mes, que el de los hombres que ejercen el mismo trabajo. Determine el salario anual de un celador. Redondee su respuesta al dólar más cercano.

20. **Huelga de conductores** Hace pocos años, los transportistas de cemento estuvieron en huelga durante 46 días. Antes de la huelga recibían \$7.50 por hora y trabajan 260 días, 8 horas diarias durante un año. ¿Qué porcentaje de incremento en el ingreso anual fue necesario para, en un año, suplir la pérdida de esos 46 días?



21. Punto de equilibrio Un fabricante de cartuchos para juegos de vídeo, vende cada cartucho en \$19.95. El costo de fabricación de cada cartucho es de \$12.92. Los costos fijos mensuales son de \$8000. Durante el primer mes de ventas de un nuevo juego, ¿cuántos cartuchos debe vender el fabricante para llegar al punto de equilibrio (esto es, para que el ingreso total se igual al costo total)?

22. Club de inversión Un club de inversión compró un bono de una compañía petrolera por \$5000. El bono da un rendimiento de 8% anual. El club ahora quiere comprar acciones de una compañía de suministros para hospitales. El precio de cada acción es de \$20 y se gana un dividendo de \$0.50 al año por acción. ¿Cuántas acciones debe comprar el club de modo que de su inversión total en acciones y bonos obtenga el 5% anual?

23. Cuidado de la vista Como un beneficio complementario para sus empleados, una compañía estableció un plan de cuidado de la vista. Bajo este plan, cada año la compañía paga los primeros \$35 de los gastos de cuidado de la vista y el 80% de todos los gastos adicionales en ese rubro, hasta cubrir un *total* máximo de \$100. Para un empleado, determine los gastos anuales totales en cuidado de la vista cubiertos por este programa.

24. Control de calidad En un periodo determinado, el fabricante de una barra de dulce con centro de caramelo determinó que 3.1% de las barras fueron rechazadas por imperfecciones.

a. Si c barras de dulce se fabrican en un año, ¿cuántas esperaría rechazar el fabricante?

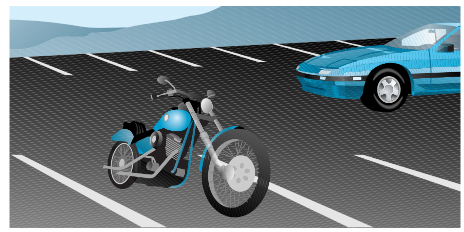
b. Para este año, el consumo anual del dulce se proyecta que será de 600,000,000 de barras. Aproximadamente, ¿cuántas barras tendrá que producir el fabricante, si toma en cuenta las rechazadas?

25. Negocios Suponga que los clientes comprarán q unidades de un producto cuando el precio es de $(80 - q)/4$ dólares *cada uno*. ¿Cuántas unidades deben venderse a fin de que el ingreso por ventas sea de 400 dólares?

26. Inversión ¿En cuánto tiempo se duplicará una inversión a interés simple con una tasa del 5% anual? [*Sugerencia:* véase el ejemplo 6(a) de la sec. 1.1 y exprese el 5% como 0.05.]

27. Alternativas en los negocios El inventor de un juguete nuevo ofrece a la compañía Kiddy Toy los derechos de exclusividad para fabricar y vender el juguete por una suma total de \$25,000. Después de estimar que las posibles ventas futuras al cabo de un año serán nulas, la compañía está revisando la siguiente propuesta alternativa: dar un pago total de \$2000 más una regalía de \$0.50 por cada unidad vendida. ¿Cuántas unidades deben venderse el primer año para hacer esta alternativa tan atractiva al inventor como la petición original? [*Sugerencia:* determine cuándo son iguales los ingresos con ambas propuestas.]

28. Estacionamiento Un estacionamiento es de 120 pies de largo por 80 pies de ancho. Debido a un incremento en el personal, se decidió duplicar el área del lote aumentando franjas de igual anchura en un extremo y un lado (en forma de escuadra). Determine el ancho de cada franja.



29. Rentas Usted es el asesor financiero de una compañía que posee un edificio con 50 oficinas. Cada una puede rentarse en \$400 mensuales. Sin embargo, por cada incremento de \$20 mensuales se quedarán dos vacantes sin posibilidad de que sean ocupadas. La compañía quiere obtener un total de \$20,240 mensuales de rentas del edificio. Se le pide determinar la renta que debe cobrarse por cada oficina. ¿Cuál es su respuesta?

30. Inversión Hace seis meses, una compañía de inversión tenía un portafolio de \$3,100,000, que consistía en acciones de primera y acciones atractivas. Desde entonces, el valor de la inversión en acciones de primera aumentó $\frac{1}{10}$, mientras que el valor de las acciones atractivas disminuyó $\frac{1}{10}$. El valor actual del portafolio es \$3,240,000. ¿Cuál es el valor *actual* de la inversión en acciones de primera?

31. Ingreso El ingreso mensual de cierta compañía está dado por $R = 800p - 7p^2$, donde p es el precio en dólares del producto que fabrica esa compañía. ¿A qué precio el ingreso será de \$10,000, si el precio debe ser mayor de \$50?

32. Razón precio-utilidad La *razón precio-utilidad* (P/U) de una compañía es el cociente que se obtiene de dividir el valor de mercado de una acción de sus acciones comunes en circulación, entre las utilidades por acción. Si P/U se incrementa en 10% y los ingresos por acción aumentan en 20%, determine el incremento porcentual en el valor de mercado por acción para las acciones comunes.

33. Equilibrio de mercado Cuando el precio de un producto es p dólares por unidad, suponga que un fabricante suministrará $2p - 8$ unidades del producto al mercado y que los consumidores demandarán $300 - 2p$ unidades. En el valor de p para el cual la oferta es igual a la demanda, se dice que el mercado está en equilibrio. Determine ese valor de p.

34. Equilibrio de mercado Repita el problema 33 para las condiciones siguientes: a un precio de p dólares por unidad, la oferta es $3p^2 - 4p$ y la demanda es $24 - p^2$.

35. Barda de seguridad Por razones de seguridad, una compañía cercará un área rectangular de 11,200 pies^2 en la parte posterior de su planta. Un lado estará delimitado por el edificio y los otros tres por la barda (véase la fig. 2.4). Si se van a utilizar 300 pies de barda, ¿cuáles son las dimensiones del área rectangular?

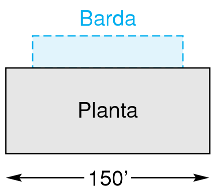


FIGURA 2.4 Barda de seguridad (problema 35).

36. Diseño de empaque Una compañía está diseñando un empaque para su producto. Una parte del empaque será una caja abierta fabricada a partir de una pieza cuadrada de aluminio, de la que se cortará un cuadrado de 2 pulgadas de cada esquina para así doblar hacia arriba los lados (véase la fig. 2.5). La caja es para contener 50 pulgadas^3. ¿Cuáles son las dimensiones de la pieza cuadrada de aluminio que debe utilizarse?

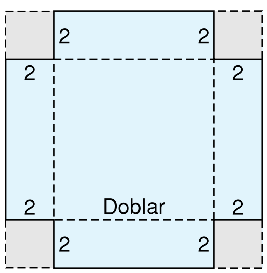


FIGURA 2.5 Construcción de una caja (problema 36).

37. Diseño de producto Una compañía de dulces fabrica una popular barra de forma rectangular con 10 cm de largo, por 5 cm de ancho y 2 cm de grosor (véase la fig. 2.6). A causa de un incremento en los costos, la compañía ha decidido reducir el volumen de la barra en un drástico 28%; el grosor será el mismo, pero el largo y el ancho se reducirán en la misma cantidad. ¿Cuál será el largo y el ancho de la nueva barra?

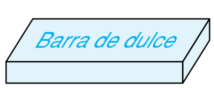


FIGURA 2.6 Barra de dulce (problema 37).

38. Diseño de producto Una compañía fabrica un dulce en forma de arandela (un dulce con un agujero en medio; véase la fig. 2.7). A causa del incremento en los costos, la compañía reducirá el volumen del dulce en un 20%. Para hacerlo conservarán el mismo grosor y radio exterior, pero harán mayor el radio interno. Actualmente el grosor es de 2 mm, el radio interno 2 mm y el radio exterior 7 mm. Determine el radio interno del dulce con el nuevo estilo. [*Sugerencia:* el volumen V de un disco sólido es $\pi r^2 h$, donde r es el radio y h el grosor del disco.]

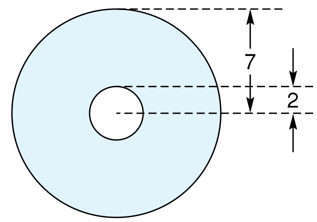


FIGURA 2.7 Dulce en forma de arandela (problema 38).

39. Saldo compensatorio Un *saldo compensatorio* se refiere a aquella práctica en la cual un banco requiere a quien solicita un crédito, mantenga en depósito una cierta parte de un préstamo durante el plazo del mismo. Por ejemplo, si una compañía obtiene un préstamo de \$100,000, el cual requiere de un saldo compensatorio del 20%, tendría que dejar \$20,000 en depósito y usar sólo \$80,000. Para satisfacer los gastos de renovación de sus herramientas, Victor Manufacturing Company debe pedir prestados \$95,000. El banco, con el que no han tenido tratos previos, requiere de un saldo compensatorio del 15%. Aproximando a la unidad de millar de dólares más cercana, diga, ¿cuál debe ser el monto total del préstamo para obtener los fondos necesarios?

40. Plan de incentivos Una compañía de maquinaria tiene un plan de incentivos para sus agentes de ventas. Por cada máquina que un agente venda la comisión es de \$40. La comisión por cada máquina vendida se incrementa en \$0.04, siempre que se vendan más de 600 unidades. Por ejemplo, la comisión sobre cada una de 602 máquinas vendidas será de \$40.08. ¿Cuántas máquinas debe vender un agente para obtener ingresos por \$30,800?

41. Bienes raíces Una compañía fraccionadora compra una parcela en \$7200. Después de vender todo, excepto

20 acres, con una ganancia de \$30 por acre sobre su costo original, el costo total de la parcela se recuperó. ¿Cuántos acres se vendieron?

42. Margen de utilidad EL *margen de utilidad* de una compañía es su ingreso neto dividido entre sus ventas totales. El margen de utilidad en cierta compañía aumentó en 0.02 con respecto al año anterior. El año anterior vendió su producto en \$3.00 cada uno y tuvo un ingreso neto de \$4500. Este año incrementó el precio de su producto en \$0.50 por unidad, vendió 2000 más y tuvo un ingreso neto de \$7140. La compañía nunca ha tenido un margen de utilidad mayor que 0.15. ¿Cuántos de sus productos vendió la compañía el año pasado y cuántos vendió este año?

43. Negocios Una compañía fabrica los productos A y B. El costo de producir cada unidad de A es \$2 más que el de B. Los costos de producción de A y B son \$1500 y \$1000, respectivamente, y se hacen 25 unidades más de A que de B. ¿Cuántas unidades de cada producto se fabrican?

OBJETIVO Resolver desigualdades lineales con una variable e introducir la notación de intervalos.

2.2 Desigualdades lineales

Suponga que a y b son dos puntos sobre la recta de los números reales. Entonces, a y b coinciden, a se encuentra a la izquierda de b, o a se encuentra a la derecha de b (véase la fig. 2.8).

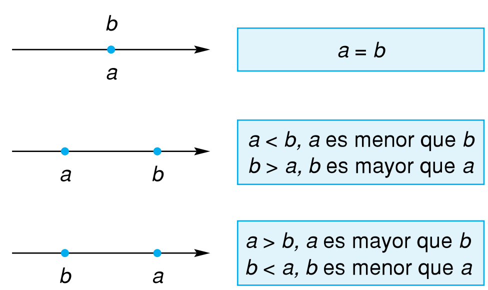


FIGURA 2.8 Posición relativa de dos puntos.

Si a y b coinciden entonces $a = b$. Si a se encuentra a la izquierda de b, decimos que a es menor que b y escribimos $a < b$, en donde el *símbolo de desigualdad* "$<$" se lee "es menor que". Por otra parte, si a se encuentra a la derecha de b, decimos que a es mayor que b y escribimos $a > b$. Los enunciados $a > b$ y $b < a$ son equivalentes.

Otro símbolo de desigualdad, "$\leq$", se lee "es menor o igual a" y se define como: $a \leq b$ si y sólo si $a < b$ o $a = b$. De manera semejante, el símbolo "$\geq$" está definido como: $a \geq b$ si y sólo si $a > b$ o $a = b$. En este caso decimos que a es mayor o igual a b.

Usaremos las palabras *números reales* y *puntos* de manera indistinta, ya que existe una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos que están sobre una recta. Así, podemos hablar de los puntos $-5, -2, 0$,7 y 9, y escribir $7 < 9, -2 > -5, 7 \leq 7$ y $7 \geq 0$ (véase la fig. 2.9). Claramente, si $a > 0$, entonces a es positivo; si $a < 0$, entonces a es negativo.

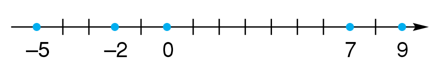


FIGURA 2.9 Puntos en la recta numérica.

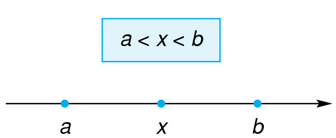


FIGURA 2.10 $a < x$ y $x < b$.

Suponga que $a < b$, y x está entre a y b (véase la fig. 2.10). Entonces no sólo $a < x$, sino también $x < b$. Indicamos esto escribiendo $a < x < b$, que puede considerarse como una desigualdad doble. Por ejemplo, $0 < 7 < 9$ (como referencia regrese a la fig. 2.9).

Acabamos de definir una desigualdad usando la relación menor que ($<$), pero las otras ($>$, $\leq$, $\geq$) también podrían haber sido utilizadas.

Definición

Una ***desigualdad*** es un enunciado que establece que un número es menor que otro.

Por supuesto, representamos las desigualdades por medio de símbolos de desigualdad. Si dos desigualdades tienen sus símbolos apuntando en la misma dirección, entonces decimos que tienen el *mismo sentido*. Si no, se dice que son de *sentidos opuestos* o que una tiene el *sentido contrario* de la otra. Por tanto, $a < b$ y $c < d$ tienen el mismo sentido, pero $a < b$ tiene el sentido contrario de $c > d$.

Resolver una desigualdad, como $2(x - 3) < 4$, significa encontrar todos los valores de la variable para los cuales dicha desigualdad es cierta. Esto implica la aplicación de ciertas reglas que ahora establecemos:

Reglas para las desigualdades

Tenga en mente que las reglas también se aplican a $\leq$, $>$, y $\geq$.

1. Si un mismo número se suma o resta en ambos lados de una desigualdad, la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. En forma simbólica,

$$\text{si } a < b, \text{ entonces } a + c < b + c \text{ y } a - c < b - c.$$

Por ejemplo, $7 < 10$, de modo que $7 + 3 < 10 + 3$.

2. Si ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen por el mismo número **positivo,** la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. En forma simbólica,

$$\text{si } a < b \text{ y } c > 0, \text{ entonces } ac < bc \text{ y } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Por ejemplo, $3 < 7$ y $2 > 0$, de modo que $3(2) < 7(2)$ y $\frac{3}{2} < \frac{7}{2}$.

El sentido de una desigualdad debe invertirse cuando multiplicamos o dividimos ambos lados por un número negativo.

3. Si ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen por el mismo número ***negativo,*** entonces la desigualdad resultante tendrá el sentido ***contrario*** de la original. En forma simbólica,

$$\text{si } a < b \text{ y } c > 0, \text{ entonces } a(-c) > b(-c) \text{ y } \frac{a}{-c} > \frac{b}{-c}.$$

Por ejemplo, $4 < 7$ pero $4(-2) > 7(-2)$ y $\frac{4}{-2} > \frac{7}{-2}$.

4. Cualquier lado de una desigualdad puede reemplazarse por una expresión equivalente a ella. En forma simbólica,

$$\text{si } a < b \text{ y } a = c, \text{ entonces } c < b.$$

Por ejemplo, si $x < 2$ y $x = y + 4$, entonces $y + 4 < 2$.

5. Si los lados de una desigualdad son ambos positivos o negativos, entonces sus recíprocos[1] respectivos estarán relacionados por un símbolo de desigualdad con sentido ***contrario*** a la desigualdad original. Por ejemplo, $2 < 4$, pero $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.
6. Si ambos lados de una desigualdad son positivos y elevamos cada lado a la misma potencia positiva, entonces la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. Por tanto, si $0 < a < b$ y $n > 0$, entonces

$$a^n < b^n \text{ y } \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b},$$

en donde suponemos que n es un entero positivo en la última desigualdad. Por ejemplo, $4 < 9$ de modo que $4^2 < 9^2$ y $\sqrt{4} < \sqrt{9}$.

El resultado de aplicar las reglas 1 a 4 a una desigualdad se conoce como *desigualdad equivalente.* Ésta es una desigualdad cuya solución es exactamente la misma que la de la original. Aplicaremos estas reglas a una *desigualdad lineal*.

Definición

Una ***desigualdad lineal*** en la variable x es aquella que puede escribirse en la forma

La definición también aplica para $\leq$, $>$, y $\geq$.

$$ax + b < 0,$$

donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

Principios en práctica 1

Resolución de una desigualdad lineal

Un agente de ventas tiene un ingreso mensual dado por $I = 200 + 0.8S$, en donde S es el número de productos vendidos en el mes. ¿Cuántos productos debe vender para obtener al menos \$4500 en un mes?

EJEMPLO 1 Resolución de una desigualdad lineal

Resolver $2(x - 3) < 4$.

Solución:

Estrategia: reemplazaremos la desigualdad dada por desigualdades equivalentes hasta que la solución sea evidente.

$$\begin{aligned}
2(x-3) &< 4, \\
2x - 6 &< 4 && \text{(Regla 4),} \\
2x - 6 + 6 &< 4 + 6 && \text{(Regla 1),} \\
2x &< 10 && \text{(Regla 4),} \\
\frac{2x}{2} &< \frac{10}{2} && \text{(Regla 2),} \\
x &< 5.
\end{aligned}$$

Todas las desigualdades son equivalentes. Por tanto, la desigualdad original es cierta para *todos* los números reales x tales que $x < 5$. Por ejemplo, la desigualdad es cierta para $x = -10, -0.1, 0, \frac{1}{2}$ y 4.9. Podemos escribir nuestra solución simplemente como $x < 5$ y representarla de manera geométrica por medio de una semirrecta gruesa en la figura 2.11. El paréntesis indica que el 5 *no está incluido* en la solución.

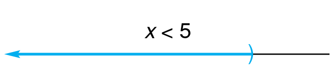


FIGURA 2.11 Todos los números reales menores que 5.

[1]El *recíproco* de un número diferente de cero, a, se define como $\frac{1}{a}$.

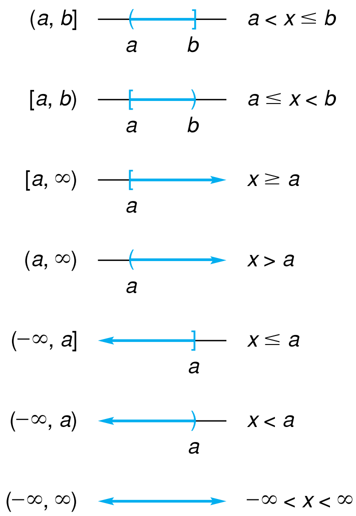


FIGURA 2.13 Intervalos.

En el ejemplo 1, la solución consistía en un conjunto de números, a saber, todos los menores que 5. En general, es común utilizar el término **intervalo** para referirse a tales conjuntos. En el caso del ejemplo 1, el conjunto de todas las x tales que $x < 5$ puede denotarse por la *notación de intervalo* $(-\infty, 5)$. El símbolo $-\infty$ no es un número, sino sólo una convención para indicar que el intervalo se extiende de manera indefinida hacia la izquierda.

Existen otros tipos de intervalos. Por ejemplo, el conjunto de todos los números x para los cuales $a \leq x \leq b$ se conoce como un **intervalo cerrado,** que incluye a los números a y b, los cuales se llaman *extremos* del intervalo. Este intervalo se denota mediante $[a, b]$ y se muestra en la figura 2.12(a). Los corchetes indican que a y b *están incluidos* en el intervalo. Por otra parte, el conjunto de todas las x para las que

FIGURA 2.12 Intervalos cerrados y abiertos.

$a < x < b$ se llama **intervalo abierto** y se denota mediante (a, b). Los extremos *no* son parte de este conjunto [véase la fig. 2.12(b)]. Para ampliar estos conceptos, tenemos los intervalos mostrados en la figura 2.13.

EJEMPLO 2 Resolución de una desigualdad lineal

Resolver $3 - 2x \leq 6$.

Solución:

$$3 - 2x \leq 6, \qquad$$

$$-2x \leq 3 \qquad \text{(Regla 1)},$$

$$x \geq -\frac{3}{2} \qquad \text{(Regla 3)}.$$

Al dividir ambos lados entre –2 se invierte el sentido de la desigualdad.

La solución es $x \geq -\frac{3}{2}$, o, en notación de intervalo, $[-\frac{3}{2}, \infty)$. Esto se representa geométricamente en la figura 2.14.

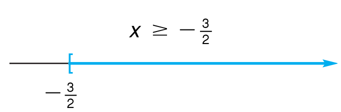


FIGURA 2.14 El intervalo $(-\frac{3}{2}, \infty)$.

■ ***Principios en práctica 2***

Resolución de una desigualdad lineal

El veterinario de un zoológico puede comprar cuatro diferentes alimentos para animales con diferentes valores de nutrimentos, para los animales de pastoreo. Sea x_1 el número de bolsas de alimento 1, x_2 el número de bolsas de alimento 2, y así sucesivamente. El número de bolsas de cada alimento necesario puede describirse por medio de las ecuaciones siguientes:

$$x_1 = 150 - x_4$$
$$x_2 = 3x_4 - 210$$
$$x_3 = x_4 + 60$$

Con base en estas ecuaciones, plantee cuatro desigualdades, suponiendo que cada variable debe ser no negativa.

EJEMPLO 3 Resolución de una desigualdad lineal

Resolver $\frac{3}{2}(s - 2) + 1 > -2(s - 4)$.

Solución:

$$\frac{3}{2}(s - 2) + 1 > -2(s - 4),$$

$$2[\tfrac{3}{2}(s - 2) + 1] > 2[-2(s - 4)] \qquad \text{(Regla 2)},$$

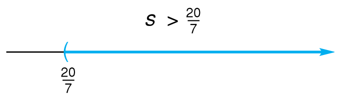


FIGURA 2.15 El intervalo $(\frac{20}{7}, \infty)$.

$$\begin{aligned} 3(s-2)+2 &> -4(s-4), \\ 3s-4 &> -4s+16, \\ 7s &> 20 && \text{(Regla 1),} \\ s &> \frac{20}{7} && \text{(Regla 2).} \end{aligned}$$

La solución es $(\frac{20}{7}, \infty)$. Véase la figura 2.15.

EJEMPLO 4 **Resolución de desigualdades lineales**

a. *Resolver* $2(x-4)-3 > 2x-1$.

Solución:

$$\begin{aligned} 2(x-4)-3 &> 2x-1, \\ 2x-8-3 &> 2x-1, \\ -11 &> -1. \end{aligned}$$

Como nunca será verdadero que $-11 > -1$, no existe solución y el conjunto solución es $\varnothing$.

b. *Resolver* $2(x-4)-3 < 2x-1$.

Solución: procediendo como en la parte (a), obtenemos $-11 < -1$. Esto es verdadero para todos los números reales x, de modo que la solución es $(-\infty, \infty)$; véase la figura 2.16.

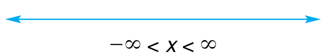


FIGURA 2.16 El intervalo $(-\infty, \infty)$.

Ejercicio 2.2

En los problemas del 1 al 34 resuelva las desigualdades. Dé su respuesta en notación de intervalo y represéntela en forma geométrica sobre la recta de los números reales.

1. $3x > 12$.

2. $4x < -2$.

3. $4x - 13 \leq 7$.

4. $3x \geq 0$.

5. $-4x \geq 2$.

6. $2y + 1 > 0$.

7. $5 - 7s > 3$.

8. $4s - 1 < -5$.

9. $3 < 2y + 3$.

10. $6 \leq 5 - 3y$.

11. $2x - 3 \leq 4 + 7x$.

12. $-3 \geq 8(2 - x)$.

13. $3(2 - 3x) > 4(1 - 4x)$.

14. $8(x + 1) + 1 < 3(2x) + 1$.

15. $2(3x - 2) > 3(2x - 1)$.

16. $3 - 2(x - 1) \leq 2(4 + x)$.

17. $x + 2 < \sqrt{3} - x$.

18. $\sqrt{2}(x + 2) > \sqrt{8}(3 - x)$.

19. $\frac{5}{6}x < 40$.

20. $-\frac{2}{3}x > 6$.

21. $\frac{9y + 1}{4} \leq 2y - 1$

22. $\frac{4y - 3}{2} \geq \frac{1}{3}$.

23. $4x - 1 \geq 4(x - 2) + 7.$

24. $0x \leq 0.$

25. $\frac{1 - t}{2} < \frac{3t - 7}{3}.$

26. $\frac{3(2t - 2)}{2} > \frac{6t - 3}{5} + \frac{t}{10}.$

27. $2x + 13 \geq \frac{1}{2}x - 4.$

28. $4x - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}x.$

29. $\frac{2}{3}r < \frac{5}{6}r.$

30. $\frac{7}{4}t > -\frac{8}{3}t.$

31. $\frac{y}{2} + \frac{y}{3} > y + \frac{y}{5}.$

32. $9 - 0.1x \leq \frac{2 - 0.01x}{0.2}.$

33. $0.1(0.03x + 4) \geq 0.02x + 0.434.$

34. $\frac{5y - 1}{-3} < \frac{7(y + 1)}{-2}.$

35. Utilidades Cada mes del año pasado una compañía tuvo utilidades mayores que \$37,000 pero menores que \$53,000. Si S representa los ingresos totales del año, describa S utilizando desigualdades.

36. Utilizando desigualdades, simbolice el enunciado siguiente. El número de horas de trabajo x para fabricar un producto no es menor que $2\frac{1}{2}$ ni mayor que 4.

37. Geometría En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos x es menor que 3 veces el otro ángulo agudo más 10 grados. Resuelva para x.

38. Gasto Una estudiante tiene \$360 para gastar en un sistema estereofónico y algunos discos compactos. Si ella compra un estereofónico que cuesta \$219 y el costo de los discos es de \$18.95 cada uno, determine el mayor número de discos que ella puede comprar.

OBJETIVO Modelar situaciones en términos de desigualdades.

2.3 Aplicaciones de desigualdades

La resolución de problemas expresados con palabras algunas veces puede implicar desigualdades, como lo ilustran los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 Utilidad

Para una compañía que fabrica calentadores para acuarios, el costo combinado de mano de obra y material es de \$21 *por calentador. Los costos fijos* (*costos en que se incurre en un periodo dado, sin importar la producción*) *son* \$70,000. *Si el precio de venta de un calentador es* \$35, *¿cuántos debe vender para que la compañía genere utilidades?*

Solución:

Estrategia: recuerde que

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}.$$

Debemos encontrar el ingreso total y después determinar cuándo su diferencia es positiva.

Sea q el número de calentadores que deben venderse. Entonces su costo es $21q$. Por tanto, el costo total para la compañía es $21q + 70{,}000$. El ingreso total de la venta de q calentadores será $35q$. Ahora,

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total},$$

y queremos que la utilidad > 0. Así,

$$\begin{aligned} \text{ingreso total} - \text{costo total} &> 0. \\ 35q - (21q + 70{,}000) &> 0, \\ 14q &> 70{,}000, \\ q &> 5000. \end{aligned}$$

Por tanto, deben venderse al menos 5001 calentadores para que la compañía genere utilidades.

EJEMPLO 2 Renta *versus* compra

Un constructor debe decidir entre rentar o comprar una máquina excavadora. Si fuese a rentar la máquina, el costo de la renta sería de \$3000 *mensuales* (*sobre la base de un año*) *y el costo diario* (*gas, aceite y operador*) *sería de* \$180 *por cada día que la máquina se utilice. Si él fuese a comprarla, sus costos fijos anuales serían de* \$20,000 *y los costos diarios de operación y mantenimiento serían de* \$230 *por cada día que la máquina se utilizara. ¿Cuántos días al año por lo menos, tendría que utilizar el constructor la máquina para justificar la renta en lugar de la compra?*

Solución:

Estrategia: vamos a determinar expresiones para el costo anual de la renta y el costo anual de la compra, así encontraremos cuándo el costo de la renta es menor que el de la compra.

Sea d el número de días de cada año que la máquina será utilizada. Si la máquina se renta, el costo total anual consiste en los gastos de la renta, que son (12)(3000) y los costos diarios de $180d$. Si la máquina se compra, el costo por año es $20000 + 230d$. Queremos que

$$\begin{aligned} \text{costo}_{\text{renta}} &< \text{costo}_{\text{compra}}, \\ 12(3000) + 180d &< 20{,}000 + 230d, \\ 36{,}000 + 180d &< 20{,}000 + 230d, \\ 16{,}000 &< 50d, \\ 320 &< d. \end{aligned}$$

Por tanto, el constructor debe utilizar la máquina al menos 321 días para justificar rentarla.

EJEMPLO 3 Razón de activo

La *razón de activo* de un negocio es el cociente de sus activos circulantes (efectivo, inventario de mercancías y cuentas por cobrar), a sus pasivos circulantes (préstamos a corto plazo e impuestos).

Después de consultar con el contralor, el presidente de la Ace Sports Equipment Company decide pedir un préstamo a corto plazo para hacerse de inventario. La compañía tiene un activo de \$350,000 *y un pasivo de* \$80,000. *¿Cuánto pueden pedir prestado si quieren que su razón de activo no sea menor que* 2.5? (*Nota: los fondos que recibirán se consideran como activo y el préstamo como pasivo.*)

Solución: sea x la cantidad que la compañía puede pedir prestada. Entonces sus activos serán $350{,}000 + x$ y sus pasivos $80{,}000 + x$. Así,

$$\text{razón de activo} = \frac{\text{activo circulante}}{\text{pasivo circulante}} = \frac{350{,}000 + x}{80{,}000 + x}.$$

Aunque la desigualdad que debe resolverse no es lineal, conduce a una desigualdad lineal.

Queremos

$$\frac{350{,}000 + x}{80{,}000 + x} \geq 2.5.$$

Ya que x es positiva, también lo es $80{,}000 + x$. Por lo que podemos multiplicar ambos lados de la desigualdad por $80{,}000 + x$ y su sentido permanecerá igual. Tenemos

$$\begin{aligned} 350{,}000 + x &\geq 2.5(80{,}000 + x), \\ 150{,}000 &\geq 1.5x, \\ 100{,}000 &\geq x. \end{aligned}$$

En consecuencia, la compañía puede pedir prestado hasta \$100,000 y aún mantener una razón de activo no menor que 2.5.

EJEMPLO 4 Publicidad

Una compañía de publicidad determina que el costo por publicar cada ejemplar de una cierta revista es de \$1.50. *El ingreso recibido de los distribuidores es* \$1.40 *por revista. El ingreso por publicidad es* 10% *de los ingresos recibidos de los distribuidores por todos los ejemplares vendidos por arriba de* 10,000. *¿Cuál es el número mínimo de revistas que deben venderse de modo que la compañía obtenga utilidades?*

Solución:

Estrategia: tenemos que utilidad = ingreso total − costo total, de modo que encontramos una expresión para la utilidad y después la hacemos mayor que cero.

Sea q el número de revistas vendidas. El ingreso recibido de los distribuidores es $1.40q$ y el recibido por publicidad es $(0.10)[(1.40)(q - 10{,}000)]$. El costo total de la publicación es $1.50q$. Así,

$$\begin{aligned} \text{ingreso total} - \text{costo total} &> 0. \\ 1.40q + (0.10)[(1.40)(q - 10{,}000)] - 1.50q &> 0, \\ 1.4q + 0.14q - 1400 - 1.5q &> 0, \\ 0.04q - 1400 &> 0, \\ 0.04q &> 1400, \\ q &> 35{,}000. \end{aligned}$$

Por tanto, el número total de revistas debe ser mayor que 35,000. Esto es, al menos 35,001 ejemplares deben venderse para garantizar utilidades.

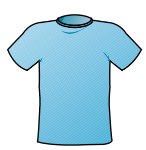
Ejercicio 2.3

1. **Utilidades** La compañía Davis fabrica un producto que tiene un precio unitario de venta de \$20 y un costo unitario de \$15. Si los costos fijos son de \$600,000, determine el número mínimo de unidades que deben venderse para que la compañía tenga utilidades.

2. **Utilidades** Para producir una unidad de un producto nuevo, una compañía determina que el costo del material es de \$2.50 y el de mano de obra de \$4. El gasto general, sin importar el volumen de ventas, es de \$5000. Si el precio para un mayorista es de \$7.40 por unidad, determine el número mínimo de unidades que debe venderse para que la compañía obtenga utilidades.

3. **Arrendamiento con opción a compra vs. compra** Una mujer de negocios quiere determinar la diferencia entre el costo de poseer un automóvil y el de arrendarlo con opción a compra. Ella puede arrendar un automóvil por \$420 al mes (con una base anual). Bajo este plan, el costo por milla (gasolina y aceite) es \$0.06. Si ella compra el automóvil, el gasto fijo anual sería de \$4700, y otros costos ascenderían a \$0.08 por milla. ¿Cuántas millas por lo menos tendría que conducir ella por año para que el arrendamiento no fuese más caro que la compra?

4. **Fabricación de camisetas** Una fábrica de camisetas produce N camisetas con un costo de mano de obra total (en dólares) de $1.2N$ y un costo total por material de $0.3N$. Los gastos generales para la planta son de \$6000. Si cada camiseta se vende en \$3, ¿cuántas camisetas deben venderse para que la compañía obtenga utilidades?



5. **Publicidad** El costo unitario de publicación de una revista es de \$0.65. Cada una se vende al distribuidor en \$0.60, y la cantidad que se recibe por publicidad es el 10% de la cantidad recibida por todas las revistas vendidas arriba de las 10,000. Encuentre el menor número de revistas que pueden publicarse sin pérdida, esto es, que utilidad ≥ 0. (Suponga que toda la emisión se venderá.)

6. **Asignación de producción** Una compañía produce relojes despertadores. Durante una semana normal de trabajo, el costo por mano de obra para producir un reloj es de \$2.00, pero si es hecho en tiempo extra su costo asciende a \$3.00. El administrador ha decidido no gastar más de \$25,000 por semana en mano de obra. La compañía debe producir 11,000 relojes esta semana. ¿Cuál es la cantidad mínima de relojes que deben producirse durante una semana normal de trabajo?

7. **Inversión** Una compañía invierte \$30,000 de sus fondos excedentes a dos tasas de interés anual: 5 y $6\frac{3}{4}\%$. Desea un rendimiento anual que no sea menor al $6\frac{1}{2}\%$. ¿Cuál es la cantidad mínima que debe invertir a la tasa de $6\frac{3}{4}\%$?

8. **Razón de activo** La tasa de activo de Precision Machine Products es 3.8. Si sus activos circulantes son de \$570,000, ¿cuáles son sus pasivos circulantes? Para elevar sus fondos de reserva, ¿cuál es la cantidad máxima que puede pedir prestada a corto plazo si quiere que su razón de activo no sea menor que 2.6? (Véase el ejemplo 3 para una explicación de la razón de activo.)

9. **Asignación de ventas** Actualmente, un fabricante tiene 2500 unidades de un producto en inventario. Hoy el precio unitario del producto es de \$4 por unidad. El próximo mes el precio por unidad se incrementará en \$0.50. El fabricante quiere que el ingreso total recibido por la venta de las 2500 unidades no sea menor que \$10,750. ¿Cuál es el número máximo de unidades que pueden venderse este mes?

10. **Ingresos** Suponga que los consumidores comprarán q unidades de un producto al precio de $\frac{100}{q} + 1$ dólares por unidad. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que deben venderse para que el ingreso por ventas sea mayor que \$5000?

11. **Sueldo por hora** A los pintores con frecuencia se les paga por hora o por obra determinada. El salario que reciben puede afectar su velocidad de trabajo. Por ejemplo, suponga que unos pintores pueden trabajar por \$8.50 la hora, o por \$300 más \$3 por cada hora por debajo de 40, si completan el trabajo en menos de 40 horas. Suponga que el trabajo les toma t horas. Si $t \geq 40$, claramente el sueldo por hora es mejor. Si $t < 40$, ¿para qué valores de t el salario por hora es mejor?

12. **Compensación** Suponga que una compañía le ofrece un puesto en ventas y que usted elige entre dos métodos para determinar su salario. Un método paga \$12,600 más un bono del 2% sobre sus ventas anuales. El otro método paga una comisión directa del 8% sobre sus ventas. ¿Para qué nivel de ventas anuales es mejor seleccionar el primer método?

13. **La razón de prueba de ácido** La *razón de prueba de ácido* (o *razón rápida*) de un negocio es la razón de la liquidez de sus activos —efectivo y valores más cuentas por cobrar— a sus obligaciones actuales. La mínima razón para que una compañía tenga unas finanzas sólidas es alrededor de 1.0, pero, por lo común, esto varía un poco de industria a industria. Si una compañía tiene \$450,000 en efectivo y valores, y tiene \$398,000 en obligaciones actuales, ¿cuánto necesita tener en cuentas por cobrar para mantener la razón en o por arriba de 1.3?

OBJETIVO Resolver ecuaciones y desigualdades que incluyan valores absolutos.

2.4 VALOR ABSOLUTO

Ecuaciones con valor absoluto

En la recta de los números reales, a la distancia desde el cero hasta un número x se le llama el **valor absoluto** de x, el cual se denota por $|x|$. Por ejemplo, $|5| = 5$ y $|-5| = 5$, ya que tanto el 5 como el -5 están a 5 unidades del cero (véase la fig. 2.17). En forma similar, $|0| = 0$. Note que x nunca puede ser negativo, esto es $|x| \geq 0$.

Básicamente, el valor absoluto de un número real es su valor cuando se ignora su signo.

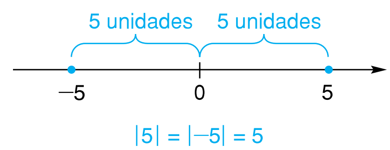


FIGURA 2.17 Valor absoluto.

Si x es positiva o cero, entonces $|x|$ es simplemente x misma, de modo que podemos omitir las líneas verticales y escribir $|x| = x$. Por otra parte, considere el valor absoluto de un número negativo, como $x = -5$.

$$|x| = |-5| = 5 = -(-5) = -x.$$

Así, si x es negativa, entonces $|x|$ es el número positivo $-x$. El signo menos indica que hemos cambiado el signo de x. Así, directamente de su interpretación geométrica, el valor absoluto puede definirse como sigue.

Definición

El ***valor absoluto*** de un número real x, escrito $|x|$, se define como

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0, \\ -x, \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Aplicando la definición, tenemos $|3| = 3$, $|-8| = -(-8)$ y $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. También, $-|2| = -2$ y $-|-2| = -2$.

Advertencia $\sqrt{x^2}$ no necesariamente es x, pero

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Por ejemplo, $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$ no -2. Esto concuerda con el hecho que

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

También, $|-x| \neq x$ y

$$|-x - 1| \neq x + 1.$$

Por ejemplo, si hacemos $x = -3$, entonces $|-(-3)| \neq -3$, y

$$|-(-3) - 1| \neq -3 + 1.$$

EJEMPLO 1 Resolución de ecuaciones con valor absoluto

a. *Resolver* $|x - 3| = 2$.

Solución: esta ecuación establece que $x - 3$ es un número que está a 2 unidades del cero. Por tanto,

$$x - 3 = 2 \text{ o } x - 3 = -2.$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene $x = 5$ o $x = 1$.

b. *Resolver* $|7 - 3x| = 5$.

Solución: esta ecuación es verdadera si $7 - 3x = 5$ o si $7 - 3x = -5$. Resolviéndolas se obtiene $x = \frac{2}{3}$ o $x = 4$.

c. *Resolver* $|x - 4| = -3$.

Solución: el valor absoluto de un número nunca es negativo, de modo que el conjunto solución es $\varnothing$.

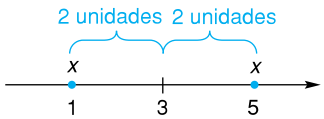


FIGURA 2.18 La solución de $|x - 3| = 2$ es 1 o 5.

Podemos interpretar $|a - b|$ o $|b - a|$ como la distancia entre a y b. Por ejemplo, la distancia entre 5 y 9 es

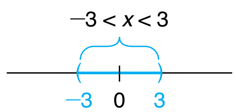
$$|9 - 5| = |4| = 4,$$

o

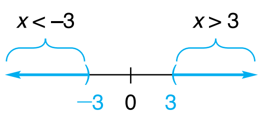
$$|5 - 9| = |-4| = 4.$$

En forma análoga, la ecuación $|x - 3| = 2$ establece que la distancia entre x y 3 son 2 unidades. Por tanto, x puede ser 1 o 5, como se muestra en el ejemplo 1(a) y la figura 2.18.

Desigualdades con valor absoluto



(a) Solución de $|x| < 3$



(b) Solución de $|x| > 3$

FIGURA 2.19 Solución de $|x| < 3$ y $|x| > 3$.

Ahora estudiaremos las desigualdades que incluyen valores absolutos. Si $|x| < 3$, entonces x está a menos de 3 unidades del cero. Por tanto, x debe estar entre -3 y 3, esto es, en el intervalo $-3 < x < 3$ [véase la fig. 2.19(a)]. Por otra parte, si $|x| > 3$, entonces x debe estar a más de 3 unidades del cero. Así, existen dos intervalos en la solución: $x < -3$ o $x > 3$ [véase la fig. 2.19(b)]. Podemos extender estas ideas como sigue. Si $|x| \leq 3$, entonces $-3 \leq x \leq 3$. Si $|x| \geq 3$, entonces $x \leq -3$ o bien $x \geq 3$. La tabla 2.1 presenta un resumen de las soluciones para desigualdades con valor absoluto.

TABLA 2.1

Desigualdad ($d > 0$)	**Solución**
$\lvert x\rvert < d$	$-d < x < d$
$\lvert x\rvert \leq d$	$-d \leq x \leq d$
$\lvert x\rvert > d$	$x < -d$ o $x > d$
$\lvert x\rvert \geq d$	$x \leq -d$ o $x \geq d$

EJEMPLO 2 Resolución de desigualdades con valor absoluto

a. *Resolver* $|x - 2| < 4$.

Solución: el número $x - 2$ debe estar a menos de 4 unidades del cero. Del análisis anterior, eso significa que $-4 < x - 2 < 4$. Podemos establecer el procedimiento para resolver esta desigualdad como sigue:

$$-4 < x - 2 < 4,$$

$$-4 + 2 < x < 4 + 2 \quad \text{(sumando 2 a cada miembro)},$$

$$-2 < x < 6.$$

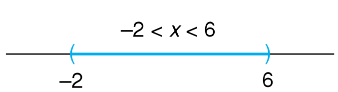


FIGURA 2.20 La solución de $|x - 2| < 4$ es el intervalo $(-2, 6)$.

Así, la solución es el intervalo abierto $(-2, 6)$. Esto significa que todos los números reales entre -2 y 6 satisfacen la desigualdad original (véase la fig. 2.20).

b. *Resolver* $|3 - 2x| \leq 5$.

Solución:

$$\begin{aligned}
-5 &\leq 3-2x \leq 5, && \\
-5-3 &\leq -2x \leq 5-3 && \text{(restando 3 de cada miembro),}\\
-8 &\leq -2x \leq 2, && \\
4 &\geq x \geq -1 && \text{(dividiendo cada miembro entre } -2\text{),}\\
-1 &\leq x \leq 4 && \text{(reescribiendo).}
\end{aligned}$$

Note que el sentido de la desigualdad original se *invirtió* cuando dividimos entre un número negativo. La solución es el intervalo cerrado $[-1, 4]$.

EJEMPLO 3 Resolución de desigualdades con valor absoluto

a. *Resolver* $|x + 5| \geq 7$.

Solución: aquí $x + 5$ debe estar *al menos* a 7 unidades del cero. Así que, $x + 5 \leq -7$ o bien $x + 5 \geq 7$. Esto significa que $x \leq -12$ o bien $x \geq 2$. Por tanto, la solución consiste en dos intervalos: $(-\infty, -12]$ y $[2, \infty)$. Podemos abreviar esta colección de números escribiendo

$$(-\infty, -12] \cup [2, \infty).$$

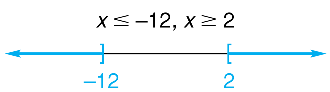


FIGURA 2.21 La unión $(-\infty, -12] \cup [2, \infty)$.

donde el símbolo $\cup$ es llamado el símbolo de la *unión* (véase la fig. 2.21). Más formalmente, la **unión** de los conjuntos A y B es el conjunto que consiste en todos los elementos que están en A o en B (o en ambos).

Las desigualdades $x < 1$ y $x > \frac{5}{3}$ no pueden combinarse en una sola desigualdad, aunque podría parecer que sí. Es incorrecto combinar $\frac{5}{3} < x$ y $x < 1$ como $\frac{5}{3} < x < 1$, ya que esto implica que $\frac{5}{3} < 1$.

b. *Resolver* $|3x - 4| > 1$.

Solución: $3x - 4 < -1$ o bien $3x - 4 > 1$. Así que $3x < 3$ o bien $3x > 5$. Por tanto, $x < 1$ o $x > \frac{5}{3}$, de modo que la solución consiste en todos los números reales en el conjunto $(-\infty, 1) \cup (\frac{5}{3}, \infty)$.

Principios en práctica 1
Notación de valor absoluto

Exprese el enunciado siguiente utilizando la notación de valor absoluto: el peso real w de una caja de cereal debe estar alrededor de 0.3 onzas del peso que se indica en la caja, que es de 22 onzas.

EJEMPLO 4 Notación de valor absoluto

Por medio de la notación de valor absoluto, exprese los enunciados siguientes:

a. x está a menos de 3 unidades del 5.

Solución:

$$|x - 5| < 3.$$

b. x difiere de 6 en por lo menos 7.

Solución:

$$|x - 6| \geq 7.$$

c. $x < 3$ y $x > -3$ de manera simultánea.

Solución:

$$|x| < 3.$$

d. x está a más de 1 unidad de -2.

Solución:

$$|x - (-2)| > 1,$$
$$|x + 2| > 1.$$

e. x está a menos de σ (letra griega "sigma") unidades de μ (letra griega "mu").

Solución:

$$|x - \mu| < \sigma.$$

Propiedades del valor absoluto

Cuatro propiedades básicas del valor absoluto son:

1. $|ab| = |a| \cdot |b|.$
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$
3. $|a - b| = |b - a|.$
4. $-|a| \leq a \leq |a|.$

Por ejemplo, la propiedad 1 establece que el valor absoluto del producto de dos números es igual al producto de los valores absolutos de esos números.

EJEMPLO 5 Propiedades del valor absoluto

a. $|(-7) \cdot 3| = |-7| \cdot |3| = 21.$

b. $|4 - 2| = |2 - 4| = 2.$

c. $|7 - x| = |x - 7|.$

d. $\left|\frac{-7}{3}\right| = \frac{|-7|}{|3|} = \frac{7}{3}; \left|\frac{-7}{-3}\right| = \frac{|-7|}{|-3|} = \frac{7}{3}.$

e. $\left|\frac{x-3}{-5}\right| = \frac{|x-3|}{|-5|} = \frac{|x-3|}{5}.$

f. $-|2| \leq 2 \leq |2|.$

Ejercicio 2.4

En los problemas del 1 al 10 escriba una forma equivalente sin el símbolo de valor absoluto.

1. $|-13|.$ **2.** $|2^{-1}|.$ **3.** $|8 - 2|.$ **4.** $|(-4-6)/2|.$

5. $|3(-\frac{5}{3})|.$ **6.** $|2-7| - |7-2|.$ **7.** $|x| < 4.$ **8.** $|x| < 10.$

9. $|2 - \sqrt{5}|.$ **10.** $|\sqrt{5} - 2|.$

11. Utilizando el símbolo de valor absoluto, exprese cada uno de los siguientes enunciados:

a. x está a menos de 3 unidades de 7.
b. x difiere de 2 en menos de 3.
c. x no está a más de 5 unidades de 7.
d. La distancia entre 7 y x es 4.
e. $x + 4$ está a menos de 2 unidades de 0.
f. x está entre -3 y 3, pero no es igual a 3 ni a -3.
g. $x < -6$ o $x > 6$.
h. $x - 6 > 4$ o $x - 6 < -4$.
i. El número x de horas que una máquina funcionará de manera eficiente difiere de 105 en menos de 3.
j. El ingreso promedio mensual x (en dólares) de una familia difiere de 850 en menos de 100.

12. Utilice la notación de valor absoluto para indicar que x y μ difieren en no más de σ.

13. Utilice la notación de valor absoluto para indicar que los precios p_1 y p_2 de dos productos pueden diferir en no más de 8 (dólares).

14. Determine todos los valores de x tales que $|x - \mu| \leq 2\sigma$.

En los problemas del 15 al 36 resuelva la ecuación o desigualdad dada.

15. $|x| = 7.$

16. $|-x| = 2.$

17. $\left|\frac{x}{3}\right| = 2.$

18. $\left|\frac{4}{x}\right| = 8.$

19. $|x - 5| = 8.$

20. $|4 + 3x| = 6.$

21. $|5x - 2| = 0.$

22. $|7x + 3| = x.$

23. $|7 - 4x| = 5.$

24. $|1 - 2x| = 1.$

25. $|x| < 4.$

26. $|-x| < 3.$

27. $\left|\frac{x}{4}\right| > 2.$

28. $\left|\frac{x}{3}\right| > \frac{1}{2}.$

29. $|x + 7| < 2.$

30. $|5x - 1| < -6.$

31. $|x - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}.$

32. $|1 - 3x| > 2.$

33. $|5 - 8x| \leq 1.$

34. $|4x - 1| \geq 0.$

35. $\left|\frac{3x - 8}{2}\right| \geq 4.$

36. $\left|\frac{x - 8}{4}\right| \leq 2.$

En los problemas 37 y 38 exprese el enunciado utilizando la notación de valor absoluto.

37. En un experimento científico, la medida de una distancia d es 17.2 m, lo que es preciso a ± 30 cm.

38. La diferencia de temperatura entre dos sustancias químicas que se están mezclando no debe ser menor que 5 grados ni mayor que 10 grados.

39. Estadística En el análisis estadístico, la desigualdad de Chebyshev asegura que si x es una variable aleatoria, μ su media y σ su desviación estándar, entonces

$$(\text{probabilidad de que } |x - \mu| > h\sigma) \geq \frac{1}{h^2}.$$

Determine aquellos valores de x tales que $|x - \mu| > h\sigma$.

40. Tolerancia de manufactura En la fabricación de artefactos, la dimensión promedio de una parte es 0.01 cm. Utilizando el símbolo de valor absoluto, exprese el hecho de que una medida individual x de una parte, no debe diferir del promedio en más de 0.005 cm.

2.5 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 2.1 costo fijo; gasto general; costo variable; costo total; ganancia total; utilidad

Sección 2.2 $a < b$; $a \leq b$; $a > b$; $a \geq b$; $a < x < b$; desigualdad; sentido de una desigualdad; desigualdad equivalente; desigualdad lineal; $-\infty < x < \infty$; intervalo abierto; intervalo cerrado; extremos; notación de intervalo

Sección 2.4 valor absoluto $|x|$; unión $\cup$

Resumen

Si un problema está expresado en palabras usted debe transformarlo en una ecuación. Debe plantear los enunciados en forma de una ecuación (o en una desigualdad). Esto se conoce como *modelado matemático.* Es importante que primero lea el problema más de una vez de modo que entienda con claridad la información y qué es lo que se pide encontrar. Después debe seleccionar una letra para representar la cantidad desconocida que quiere determinar. Utilice las relaciones e información que el problema proporciona, y forme una ecuación que incluya a la letra dicha. Por último, resuelva la ecuación y vea si su solución responde lo que se pregunta. Algunas veces la solución de la *ecuación* no es la respuesta al *problema,* pero puede ser útil para obtenerla.

Algunas relaciones básicas que se utilizan para resolver problemas de administración son las siguientes:

$$\text{costo total} = \text{costo variable} + \text{costo fijo},$$

$$\text{ingreso total} = (\text{precio por unidad})(\text{número de unidades vendidas}),$$

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}.$$

Los símbolos de desigualdad $>, \leq, >$ y $\geq$ se utilizan para representar una desigualdad, la cual es un enunciado en el que un número es, por ejemplo, menor que otro. Tres operaciones básicas que cuando se aplican a una desigualdad, garantizan una desigualdad equivalente son:

1. Sumar (o restar) el mismo número a (o de) ambos lados.
2. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número positivo.
3. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número negativo e invertir el sentido de la desigualdad.

Estas operaciones son útiles para resolver una desigualdad lineal (ésta es una que pueda escribirse en la forma $ax + b < 0$ o $ax + b \leq 0$, donde $a \neq 0$).

Una definición algebraica de valor absoluto es:

$$|x| = x, \text{ si } x \geq 0 \quad \text{y} \quad |x| = -x, \text{ si } \quad x < 0.$$

Interpretamos $|a - b|$ o $|b - a|$ como la distancia entre a y b. Si $d > 0$, entonces la solución de la desigualdad $|x| < d$ es el intervalo $(-d, d)$. La solución a $|x| > d$ consiste en dos intervalos y está dada por $(-\infty, -d) \cup (d, \infty)$. Algunas propiedades básicas del valor absoluto son:

1. $|ab| = |a| \cdot |b|$.
2. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.
3. $|a - b| = |b - a|$.
4. $-|a| \leq a \leq |a|$.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 15 resuelva la ecuación o la desigualdad.

1. $3x - 8 \geq 4(x - 2)$.
2. $2x - (7 + x) \leq x$.
3. $-(5x + 2) < -(2x + 4)$.
4. $-2(x + 6) > x + 4$.
5. $3p(1 - p) > 3(2 + p) - 3p^2$.
6. $2(4 - \frac{3}{5}q) < 5$.
7. $\dfrac{x + 5}{3} - \dfrac{1}{2} \leq 2$.
8. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} > \dfrac{x}{4}$.
9. $\dfrac{1}{4}s - 3 \leq \dfrac{1}{8}(3 + 2s)$.
10. $\dfrac{1}{3}(t + 2) \geq \dfrac{1}{4}t + 4$.
11. $|3 - 2x| = 7$.
12. $\left|\dfrac{5x - 6}{13}\right| = 0$.
13. $|4t - 1| < 1$.
14. $4 < \left|\dfrac{2}{3}x + 5\right|$.
15. $|3 - 2x| \geq 4$.

16. **Utilidad** ¿A qué porcentaje de la utilidad sobre el costo es equivalente una utilidad del 40% sobre el precio de venta de un producto?
17. **Intercambio de existencias** En cierto día, se negociaron 1132 diferentes emisiones en el mercado de acciones de Nueva York. Había 48 emisiones más que mostraban incremento de las que mostraban bajas, y ninguna emisión permaneció sin cambio. ¿Cuántas emisiones sufrieron bajas?
18. **Impuesto a las ventas** El impuesto sobre la renta en cierto estado es de 6%. Si durante un año hubo un total de \$3017.29 en compras, incluyendo el impuesto, ¿cuánto corresponde al impuesto?
19. **Asignación de producción** Una compañía fabricará un total de 10,000 unidades de su producto en las plantas A y B. La información disponible aparece a continuación.

	Planta A	Planta B
Costo unitario por mano de obra y material	\$5	\$5.50
Costos fijos	\$30,000	\$35,000

Considerando las dos plantas la compañía ha decidido asignar no más de \$117,000 para costos totales. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe producir la planta A?

20. **Tanque de almacenamiento** Una compañía va a reemplazar dos tanques cilíndricos de almacenamiento de petróleo por un tanque nuevo. Los tanques viejos miden 16 pies de altura cada uno. Uno tiene un radio de 15 pies y el otro un radio de 20 pies. El tanque nuevo también será de 16 pies de altura. Determine su radio si tiene el mismo volumen que los dos tanques juntos. (*Sugerencia:* el volumen V de un tanque cilíndrico es $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio y h la altura.)
21. **Razón de operación** La *razón de operación* de un negocio de ventas al menudeo es la razón, expresada como un porcentaje, de los costos de operación (todo, desde gastos en publicidad hasta depreciación del equipo) a las ventas netas (es decir, ventas brutas menos devoluciones y rebajas). Una razón de operación menor al 100% indica una operación rentable, mientras que una razón de operación en el rango de 80% a 90% es extremadamente buena. Si una compañía tiene ventas netas de \$236,460 en un periodo, escriba una desigualdad que describa los costos de operación que mantendrían la razón de operación por debajo de 90%.

Aplicación práctica

Grabación con calidad variable[2]

Si usted, al igual que millones de personas, tiene una grabadora de video, usted ha visto la conveniencia de grabar programas de televisión para verlos después. En formato VHS puede seleccionar la velocidad de grabación estándar (SP, standard play), larga duración (LP, long play) o extendida (EP, extended play). El formato SP es el de mayor velocidad y proporciona la mejor calidad de grabación. LP, una velocidad más lenta, proporciona una menor calidad, y EP, que es el de velocidad más lenta, da la calidad más baja de grabación.

Con la cinta de video común T-120, el tiempo máximo de grabación en SP es de 2 horas. En LP de 4 horas y en EP 6 horas. En el análisis siguiente, se supone que estos tiempos de grabación son exactos y que la cantidad de cinta utilizada cambia uniformemente con el tiempo de grabación.

Si desea grabar una película que no es de más de 2 horas, es obvio que SP puede utilizarse para obtener la mejor calidad. Sin embargo, para grabar una película de 3 horas en una sola cinta T-120, usar sólo la velocidad SP provocaría que la cinta se llenase 1 hora antes de que la película terminara. Puede salvar esta dificultad si utiliza SP junto con otro formato de velocidad, asegurándose de maximizar el tiempo en SP.

Por ejemplo, puede empezar a grabar en LP y completar en SP. Obviamente su problema será determinar cuándo debe realizarse el cambio a SP. Sea t el tiempo, en horas, que LP es utilizado, entonces $3 - t$ horas de la película serán grabadas en SP. Como la velocidad en el modo LP es de $\frac{1}{4}$ de cinta por hora y en SP es $\frac{1}{2}$ cinta por hora, la parte de la cinta utilizada en LP es $t/4$ y la parte en SP es $(3 - t)/2$. La suma de estas fracciones debe ser 1, ya que la cinta debe usarse por completo. Por tanto, necesita resolver una ecuación lineal.

$$
\begin{aligned}
\frac{t}{4} + \frac{3-t}{2} &= 1,\\
t + 2(3-t) &= 4,\\
6 - t &= 4,\\
t &= 2.
\end{aligned}
$$

Así, debe grabar en LP durante 2 horas y después cambiar a SP la restante $3 - t = 3 - 2 = 1$ hora. Esto significa que sólo un tercio de la película se grabará con la mejor calidad.

En lugar de restringirse a una película de 3 horas, puede generalizar el problema anterior para grabar una película de l horas, donde $2 < l \leq 4$. Esta situación da

$$\frac{t}{4} + \frac{l-t}{2} = 1,$$

cuya solución es

$$t = 2l - 4.$$

Asimismo, puede parecerle que no existe demasiada diferencia entre las calidades de grabación en LP y EP. Si desea iniciar en EP y terminar con SP, puede manejar una película de longitud l, en donde $2 < l \leq 6$. Sea t el tiempo, en horas, que EP es utilizada. Entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{t}{6} + \frac{l-t}{2} &= 1,\\
t + 3(l-t) &= 6,\\
-2t + 3l &= 6,\\
3l - 6 &= 2t,\\
t &= \frac{3}{2}l - 3.
\end{aligned}
$$

Por ejemplo, con una película de 3 horas grabaría en EP durante $t = \frac{3}{2}(3) - 3 = 1\frac{1}{2}$ horas y después en SP durante $3 - 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ horas. Esto demuestra que al utilizar EP en lugar de LP, se tendrá $\frac{1}{2}$ hora más de calidad de grabación en SP. Como un segundo ejemplo, considere la grabación de una película de 4 horas y 20 minutos. Aquí $l = 4\frac{1}{3}$ horas, de modo que utilizaría EP durante

$$t = \frac{3}{2}\left(\frac{13}{3}\right) - 3 = 3\tfrac{1}{2} \text{ horas}$$

y SP para el resto de la película.

[2]Adaptado de Gregory N. Fiore, "An Application of Linear Equations to the VCR", *Mathematics Teacher*, 81 (octubre de 1988), 370-372. Con permiso de National Council of Teachers of Mathematics.

El mismo método puede utilizarse para maximizar la calidad de audio en CDs grabables. Un CD estándar puede almacenar alrededor de 74 minutos de sonido estéreo de alta fidelidad. Sin embargo, usted puede almacenar muchas horas de audio en un CD por medio de un software (programa), el cual sacrifica un poco la calidad del sonido para comprimir la cantidad de espacio en el CD que se grabará. Dependiendo del método utilizado, una grabación puede comprimirse a un doceavo o incluso a un vigésimo de su tamaño original. Esto es especialmente útil para archivar grabaciones en grandes volúmenes.

Supóngase que usted trabaja para una estación de radio que utiliza compresión para archivar sus transmisiones. Tiene dos esquemas de compresión para seleccionar, uno de los cuales comprime el espacio de una grabación en un factor de 12 con muy poca pérdida de la calidad del sonido, y la otra que comprime la grabación en un factor de 20 con una pérdida notable de la calidad. Usted tiene 18 horas de audio que archivar. ¿Cuántas de esas 18 horas, o 1080 minutos, deben comprimirse al mayor nivel de grabación para maximizar la calidad global y que aún así quepan las 18 horas en un solo CD?

Para encontrar la respuesta, sea t igual al número de minutos comprimidos a una razón de 12 a 1. Esta parte de la grabación le tomará $t/12$ minutos del espacio en el CD. Los otros $1080 - t$ minutos se comprimirán a una razón de 20 a 1 y tomarán $(1080 - t)/20$ minutos del espacio. Como hay 74 minutos de espacio en el CD, la respuesta se encuentra resolviendo la ecuación lineal

$$\frac{t}{12} + \frac{1080 - t}{20} = 74.$$

La resolución es la siguiente:

$$\begin{aligned} 5t + 3(1080 - t) &= 4440, \\ 2t + 3240 &= 4440, \\ 2t &= 1200, \\ t &= 600. \end{aligned}$$

Así que, usted debe procesar 600 minutos, o 10 horas, a una compresión de 12 a 1, y las restantes 8 horas a una compresión de 20 a 1.

Para aprender más acerca de los esquemas de compresión visite `www.webopedia.com` y busque "data compression" (compresión de datos) y términos relacionados.

Ejercicios

1. Si los modos LP y SP se utilizan para grabar una película de $2\frac{1}{2}$ horas, ¿cuánto tiempo después de iniciada la película debe cambiarse de LP a SP?
2. Si los modos EP y SP se utilizan para grabar un programa de $2\frac{1}{2}$ horas, ¿cuántos minutos después de iniciado el programa debe cambiarse de EP a SP?
3. Si los modos EP y SP se utilizan para grabar una película de 2 horas y 40 minutos, ¿cuánto tiempo después de iniciada la película debe hacerse el cambio de EP a SP?
4. Los modos EP y SP se utilizan para grabar una película de 3 horas. ¿Cuánto tiempo después de iniciada la película se debe cambiar de EP a SP, si el espectador elimina 8 minutos de comerciales cada hora?
5. Utilice la función *Solver* de una calculadora gráfica para resolver la ecuación

$$\frac{x}{12} + \frac{1080 - x}{20} = 74.$$

Después, de una manera similar, resuelva la ecuación

$$\frac{x}{15} + \frac{1590 - x}{24} = 74.$$

6. En el contexto de la grabación comprimida de audio en CDs, ¿qué representa la segunda ecuación en el problema 5?