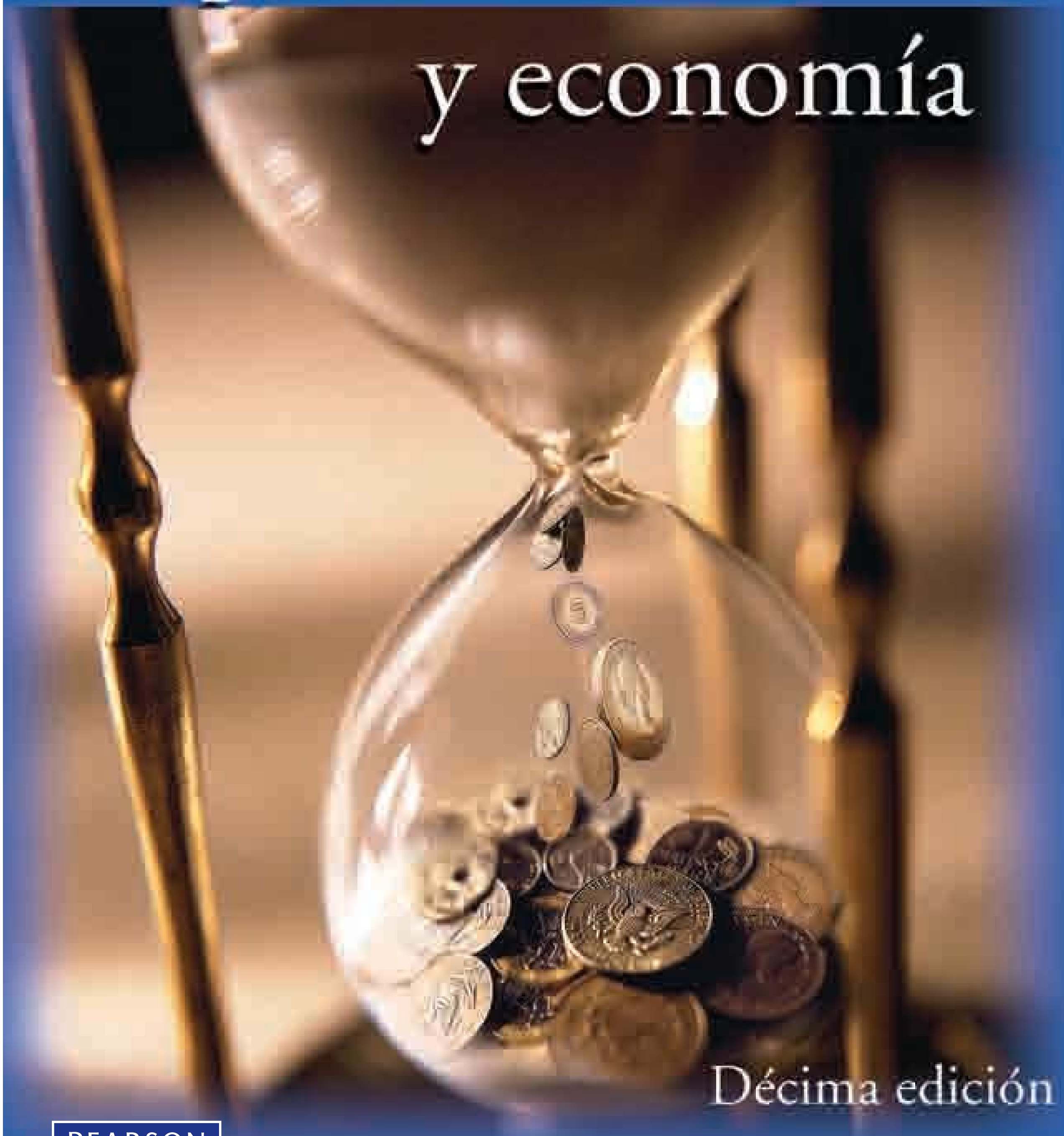
Matemáticas para administración y economía



Décima edición

PEARSON
Prentice Hall

Ernest F. Haeussler, Jr. • Richard S. Paul

Fórmula cuadrática

Si $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Líneas rectas

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	(fórmula de la pendiente)
$y - y_1 = m(x - x_1)$	(forma punto-pendiente)
$y = mx + b$	(forma pendiente-ordenada al origen)
$x =$ constante	(recta vertical)
$y =$ constante	(recta horizontal)

Desigualdades

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a(-c) > b(-c)$.

Logaritmos

$\log_b x = y$ donde $x = b^y$

$\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$

$\log_b \dfrac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

$\log_b m^r = r \log_b m$

$\log_b 1 = 0$

$\log_b b = 1$

$\log_b b^r = r$

$b^{\log_b m} = m$

$\log_b m = \dfrac{\log_a m}{\log_a b}$

Alfabeto griego

alfa	A	α	nu	N	ν
beta	B	β	xi	Ξ	ξ
gamma	Γ	γ	ómicron	O	o
delta	Δ	δ	pi	Π	π
épsilon	E	ε	rho	P	ρ
zeta	Z	ζ	sigma	Σ	σ
eta	H	η	tau	T	τ
theta	Θ	θ	Ípsilon	Υ	υ
iota	I	ι	fi	Φ	$\phi\varphi$
kappa	K	κ	ji	X	χ
lambda	Λ	λ	psi	Ψ	ψ
mu	M	μ	omega	Ω	ω

DÉCIMA EDICIÓN

Matemáticas para administración y economía

Ernest F. Haeussler, Jr.
The Pennsylvania State University

Richard S. Paul
The Pennsylvania State University

TRADUCCIÓN
Víctor Hugo Ibarra Mercado
Universidad Anáhuac del Norte

REVISIÓN TÉCNICA
Roberto Valadez Soto
Salvador Sandoval Bravo
Universidad de Guadalajara
Centro Universitario de Ciencias Económico-Administrativas

Linda Medina Herrera
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Ciudad de México

Dora Elia Cienfuegos Zurita
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Monterrey

Faustino Yescas Martínez
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Estado de México

Alejandro Narváez Herazo
Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla

Jesús Castillo García
Universidad de las Américas, Puebla

Carlos Francisco Javier Báez Teutli
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

PEARSON
Educación®

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

HAEUSSLER, F., ERNEST JR.
Matemáticas para administración y economía
Décima edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2003

ISBN: 970-26-0383-8
Área: Universitarios

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 912

ISBN 0-13-008750-5

Edición en español
Editor: Guillemo Trujano Mendoza
e-mail: guillermo.trujano@pearsoned.com
Supervisor de desarrollo: Diana Karen Montaño
Supervisor de producción: José D. Hernández Garduño
Fotografía portada: Photo Stock México

Edición en inglés
Acquisition Editor: Quincy McDonald
Editor in Chief: Sally Yagan
Vice President/Director of Production and Manufacturing: David W. Riccardi
Executive Managing Editor: Kathleen Schiaparelli
Senior Managing Editor: Linda Mihatov Behrens
Assistant Production Manager: Bayani DeLeon
Production Management: Elm Street Publishing Services, Inc.
Manufacturing Buyer: Alan Fischer
Manufacturing Manager: Trudy Pisciotti
Marketing Manager: Patric Lumumba Jones
Assistant Editor of Media: Vince Jansen
Editorial Assistant/Supplements Editor: Joanne Wendelken
Art Director: Heather Scott
Art Studio: Artworks
Senior Manager: Patty Burns
Production Manager: Ronda Whitson
Manager, Production Technologies: Matt Haas
Project Coordinator: Jessica Einsig
Illustrator: Steve McKinley

DÉCIMA EDICIÓN, 2003

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031

PEARSON
Educación®

ISBN 970-26-0383-8

Impreso en México. Printed in Mexico.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 06 05 04 03

CONTENIDO

CAPÍTULO 16 Cálculo de varias variables 737

PREFACIO

Esta décima edición de *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida* continúa proporcionando los fundamentos matemáticos para estudiantes de negocios, economía y ciencias sociales y de la vida. Inicia con temas que no son de cálculo, como ecuaciones, funciones, álgebra de matrices, programación lineal y matemáticas financieras. Después avanza a través tanto de cálculo de una como de varias variables. Las demostraciones y condiciones técnicas, son descritas de manera suficiente pero sin abundar demasiado. En ocasiones, para conservar la claridad se dan argumentos intuitivos e informales.

Aplicaciones

Una gran cantidad y variedad de aplicaciones, destinadas al lector, aparecen en esta obra; de manera continua, los estudiantes ven cómo pueden utilizarse las matemáticas que están aprendiendo. Estas aplicaciones cubren áreas tan diversas como administración, economía, biología, medicina, sociología, psicología, ecología, estadística, ciencias de la tierra y arqueología. Muchas de estas situaciones de la vida cotidiana se tomaron de la literatura existente y las referencias están documentadas. En algunas se dan los antecedentes y el contexto con el fin de estimular el interés. Sin embargo, el texto prácticamente es independiente, en el sentido de que no supone un conocimiento previo de los conceptos sobre los cuales están basadas las aplicaciones.

Cambios en la décima edición

Temas introductorios de capítulo

Lo nuevo en la décima edición es que aparecen *temas introductorios* al principio de cada capítulo. Cada tema introductorio presenta una aplicación de la vida real de las matemáticas del capítulo. Este nuevo elemento proporciona a los estudiantes una introducción intuitiva a los temas que se presentan en el capítulo.

Actualización y ampliación de las aplicaciones prácticas

Para la décima edición, esta popular característica se ha ampliado para que aparezca al final de los capítulos 0 al 16. Cada aplicación práctica proporciona una interesante, y en ocasiones novedosa aplicación que incluye las matemáticas del capítulo en el que aparecen. Cada una de las aplicaciones prácticas contiene ejercicios —lo que refuerza el énfasis del capítulo en la práctica. El último ejercicio de cada aplicación incluye preguntas que son adecuadas para la discusión en grupo.

Exámenes de repaso del capítulo

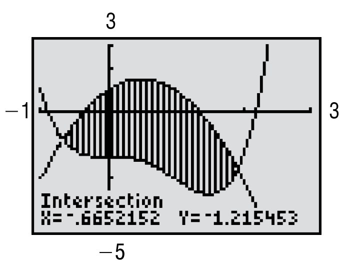
En los problemas de repaso del capítulo 1 al 16, hay problemas seleccionados que son adecuados para que los estudiantes los utilicen como exámenes de práctica para medir su dominio del material del capítulo. Todos éstos son problemas con número impar, de modo que los estudiantes pueden verificar su trabajo contra las respuestas al final del texto.

Características que se conservaron

A lo largo del texto se encuentran muchas notas de advertencia para el estudiante, que señalan errores que se comenten con frecuencia. Estas notas de advertencia se indican con el título **Advertencia.** Las definiciones se establecen y muestran de manera clara. Los conceptos importantes, así como las reglas y fórmulas importantes, se colocan dentro de cuadros para enfatizar su importancia. Asimismo, a lo largo del texto se colocan notas al margen para el estudiante. Éstas sirven para hacer una reflexión rápida que complementa el estudio.

Más de 850 ejemplos se resuelven en detalle. Algunos incluyen una **estrategia** diseñada de manera específica para guiar al estudiante a través de la logística de la solución, antes de que ésta sea obtenida.

Se incluye una gran cantidad de diagramas (casi 500) y ejercicios (más de 5000). En cada conjunto de ejercicios, los problemas agrupados están dados en orden creciente de dificultad. En muchos conjuntos de ejercicios los problemas van desde los de tipo de habilidades básicas que se resuelven en forma mecánica, hasta los más interesantes que obligan a reflexionar. Se incluyen muchos problemas que se presentan en la vida cotidiana con datos reales. Se ha hecho un esfuerzo considerable para alcanzar el balance apropiado entre los ejercicios de tipo mecánico, y los problemas que requieren de la integración de los conceptos aprendidos. Muchos de los problemas han sido actualizados o revisados.



Con el objetivo que el estudiante aprecie el valor de la **tecnología** actual, a lo largo del texto aparece material opcional para calculadoras gráficas, tanto en la exposición como en los ejercicios. Esto se incluye por varias razones: como una herramienta matemática, para visualizar conceptos, como un auxilio computacional y para reforzar conceptos. A pesar de que pantallas para una calculadora TI-83 acompañan el estudio de tecnología correspondiente, nuestro enfoque es suficientemente general, de modo que puede aplicarse en otras calculadoras gráficas.

En los conjuntos de ejercicios, los problemas que se resuelven con calculadora se indican por medio de un icono. Para proporcionar flexibilidad para la planeación de asignaciones del instructor, estos problemas están colocados al final de un conjunto de ejercicios.

El elemento **Principios en práctica** provee a los estudiantes de más aplicaciones. Ubicados en los márgenes de los capítulos 1 al 16, estos ejercicios adicionales dan a los estudiantes aplicaciones del mundo real, y más oportunidades para ver el material del capítulo y ponerlo en práctica. Un icono indica las aplicaciones de Principios en práctica que pueden resolverse por medio de una calculadora gráfica. Las respuestas a las aplicaciones de Principios en práctica aparecen al final del texto.

Cada capítulo (excepto el 0), tiene una sección de repaso que contiene una lista de términos y símbolos importantes, un resumen del capítulo y gran cantidad de problemas de repaso.

Las respuestas a los problemas con número impar aparecen al final del libro. Para muchos de los problemas de diferenciación, las respuestas aparecen en forma no simplificada y simplificada. Esto permite a los estudiantes verificar con prontitud su trabajo.

Planeación del curso

Ya que los instructores planifican el perfil del curso, para que sirva a las necesidades individuales de una clase y temario particular, no intentamos proporcionar directrices de cursos. Sin embargo, dependiendo de los antecedentes de los estudiantes, algunos instructores elegirán omitir el capítulo 0, *Repaso de álgebra*, o el capítulo 1, *Ecuaciones*; otros podrían excluir los temas de álgebra matricial y programación lineal. Ciertamente, hay otras secciones que pueden omitirse a juicio del instructor. Como una ayuda para planificar un de curso, tal vez algunos comentarios podrían ser útiles. La sección 2.1 introduce términos de administración, como ingreso, costo fijo, costo variable y utilidad. La sección 4.2 introduce la noción de ecuaciones de oferta y demanda, y en la sección 4.6 se estudia el punto de equilibrio. Secciones opcionales, que no causarán problemas si se omiten son: 7.3, 7.5, 13.4, 15.1, 15.2, 16.4, 16.6, 16.9 y 16.10. La sección 15.8 puede ser omitida, para aquellos que carezcan de bases de probabilidad.

Suplementos

Para los instructores

Instructor's Solution Manual. Se encuentra disponible en inglés y ofrece las soluciones desarrolladas para todos los ejercicios y aplicaciones de principios en práctica.
Archivo de preguntas de examen. Proporciona más de 1700 preguntas de examen, clasificadas por capítulo y sección.
Examen Personalizado de Prentice Hall. Permite al instructor ingresar al archivo de preguntas de examen computarizado, y preparar e imprimir exámenes personalmente. Incluye una característica de edición que permite agregar y cambiar preguntas.

Para instructores y estudiantes

Website acompañante de PH. Disponible en inglés y diseñado para complementar y expandir el texto, el website ofrece una variedad de herramientas de aprendizaje interactivas, que incluyen: enlaces a sitios de la red, trabajos prácticos para estudiantes y la capacidad para que los instructores revisen y evalúen el trabajo de los estudiantes en el website. Para más información, contacte a su representante local de Prentice Hall.
www.prenhall.com/Haeussler

Reconocimientos

Expresamos nuestro agradecimiento a los colegas siguientes quienes contribuyeron con comentarios y sugerencias que fueron valiosos para nosotros en el desarrollo de este texto:

R. M. Alliston (*Pennsylvania State University*); R. A. Alo (*University of Houston*); K. T. Andrews (*Oakland University*); M. N. de Arce (*University of Puerto Rico*); G. R. Bates (*Western Illinois University*); D. E. Bennett (*Murray State University*); C. Bernett (*Harper College*); A. Bishop (*Western Illinois University*); S. A. Book (*California State University*); A. Brink (*St. Cloud State University*); R. Brown (*York University*); R. W. Brown (*University of Alaska*); S. D. Bulman-Fleming (*Wilfrid Laurier University*); D. Calvetti (*National College*); D. Cameron (*University of Akron*); K. S. Chung (*Kapiolani Community College*); D. N. Clark (*University of Georgia*); E. L. Cohen (*University of 0ttawa*); J. Dawson (*Pennsylvania State University*); A. Dollins (*Pennsylvania State University*); G. A. Earles (*St. Cloud State University*); B. H. Edwards (*University of Florida*); J. R. Elliott (*Wilfrid Laurier University*); J. Fitzpatrick (*University of Texas at El Paso*); M. J. Flynn (*Rhode Island Junior College*); G. J. Fuentes (*University of Maine*); S. K. Goel (*Valdosta State University*); G. Goff (*Oklahoma State University*); J. Goldman (*DePaul University*); J. T. Gresser (*Bowling Green State University*); L. Griff (*Pennsylvania State University*); F. H. Hall (*Pennsylvania State University*); V. E. Hanks (*Western Kentucky University*); R. C. Heitmann (*The University of Texas at Austin*); J. N. Henry (*California State University*); W. U. Hodgson (*West Chester State College*); B. C. Horne Jr. (*Virginia Polytechnic Institute* y *State University*); J. Hradnansky (*Pennsylvania State University*); C. Hurd (*Pennsylvania State University*); J. A. Jiménez (*Pennsylvania State University*); W. C. Jones (*Western Kentucky University*); R. M. King (*Gettysburg College*); M. M. Kostreva (*University of Maine*); G. A. Kraus (*Gannon University*); J. Kucera (*Washington State University*); M. R. Latina (*Rhode Island Junior College*); J. F. Longman (*Villanova University*); I. Marshak (*Loyola University of Chicago*); D. Mason (*Elmhurst College*); F. B. Mayer (*Mt. San Antonio College*); P. McDougle (*University of Miami*); F. Miles (*California State University*); E. Mohnike (*Mt. San Antonio College*); C. Monk (*University of Richmond*); R. A. Moreland (*Texas Tech University*); J. G. Morris (*University of Wisconsin-Madison*); J. C. Moss (*Paducah Community College*); D. Mullin (*Pennsylvania State University*); E. Nelson (*Pennsylvania State University*); S. A. Nett (*Western Illinois University*); R. H. Oehmke (*University of lowa*); Y. Y. Oh (*Pennsylvania State University*); N. B. Patterson (*Pennsylvania State University*); V. Pedwaydon (*Lawrence Technical University*); E. Pemberton (*Wilfrid Laurier University*); M. Perkel (*Wright State University*); D. B. Priest (*Harding College*); J. R. Provencio (*University of Texas*); L. R. Pulsinelli (*Western Kentucky University*); M. Racine (*University of Ottawa*); N. M. Rice (*Queen's University*); A. Santiago (*University of Puerto Rico*); J. R. Schaefer (*University of Wisconsin-Milwaukee*); S. Sehgal (*The Ohio State University*); W. H. Seybold, Jr. (*West Chester State College*); G. Shilling (*The University of Texas at Arlington*); S. Singh (*Pennsylvania State University*); L. Small (*Los Angeles Pierce College*); E. Smet (*Huron College*); M. Stoll (*University of South Carolina*); A. Tierman (*Saginaw Valley State University*); B. Toole (*University of Maine*); J. W. Toole (*University of Maine*); D. H. Trahan (*Naval Postgraduate School*); J. P. Tull (*The Ohio State University*); L. O. Vaughan, Jr. (*University of Alabama in Birmingham*); L. A. Vercoe (*Pennsylvania State University*); M. Vuilleumier (*The Ohio State University*); B. K. Waits (*The Ohio State University*); A. Walton (*Virginia Polytechnic Institute, and State University*); H. Walum (*The Ohio State University*); E. T. H. Wang (*Wilfrid Laurier University*); A. J. Weidner (*Pennsylvania State University*); L.

Weiss (*Pennsylvania State University*); N. A. Weigmann (*California State University*); G. Woods (*The Ohio State University*); C. R. B. Wright (*University of Oregon*); C. Wu (*University of Wisconsin-Milwaukee*).

Algunos ejercicios se tomaron de los problemas utilizados por los estudiantes de la Universidad Wilfrid Laurier. Deseamos extender nuestros agradecimientos especiales al Departamento de Matemáticas de la Universidad Wilfrid Laurier por conceder permiso a Prentice Hall de utilizar y publicar este material, y también agradecer a Prentice Hall quien a su vez nos permitió hacer uso de este material.

También agradecemos a LaurelTech por su aportación a los apéndices de conceptos de cálculo, por la verificación de errores del texto y por sus esfuerzos en el proceso de revisión.

Por último, expresamos nuestra sincera gratitud a la facultad y coordinadores de cursos de la Universidad Estatal de Ohio y la Universidad Estatal de Columbus, quienes tuvieron un gran interés en la décima edición, y ofrecieron una gran cantidad de valiosas sugerencias.

Ernest F. Haeussler, Jr.
Richard S. Paul

CAPÍTULO 0

Repaso de álgebra

Quienquiera que tenga un negocio necesita llevar el registro de cómo van las cosas. Pero, ¿cómo se hace esto? Con frecuencia los profesionales en finanzas miden el desempeño de una compañía por medio del cálculo de fracciones denominadas razones financieras. Existen más de 50 diferentes razones financieras de uso común. ¿Cuál utilizar? Depende de si el analista está tratando de valuar el crecimiento de una compañía, su productividad, su nivel de endeudamiento o algún otro aspecto de su desempeño.

Una razón importante en ventas al menudeo es la *razón de rotación de inventarios*. Para un periodo dado,

$$\text{razón de rotación de inventarios} = \frac{\text{ventas netas}}{\text{inventario promedio}},$$

en donde el inventario se mide en valor total en dólares en el punto de venta. Cuando sustituimos las expresiones apropiadas para las ventas netas y el inventario promedio, la fórmula se transforma en,

$$\begin{array}{c}\text{razón de rotación}\\ \text{de inventarios}\end{array} = \frac{\text{ventas brutas} - \text{devoluciones y rebajas}}{\dfrac{\text{inventario inicial} + \text{inventario al cierre}}{2}}.$$

La razón de rotación de inventarios mide qué tan rápido se venden y reabastecen las existencias del vendedor de bienes: entre mayor sea este cociente, más rápida es la rotación. Un cociente muy pequeño significa grandes inventarios en los que los artículos permanecen en el almacén por largos periodos y están sujetos a deterioros. Una razón demasiado alta significa un inventario pequeño y un riesgo asociado para el vendedor, ya sea la pérdida de ventas o el pago de precios altos para reabastecer los artículos en pequeños lotes. La razón de rotación de inventario ideal varía de industria a industria, pero una razón anual ideal de seis es razonable para un detallista de bienes perdurables, como hardware o aparatos electrónicos. Por supuesto que la razón para un vendedor de verduras necesita ser mucho más alta.

La razón de rotación de inventarios es un ejemplo de una expresión algebraica. Su cálculo implica la sustitución de números reales para las cantidades variables (ventas brutas y otras) y la realización de operaciones aritméticas (suma, resta y división). Este capítulo revisará los números reales, las expresiones algebraicas y las operaciones básicas sobre ellos.

0.1 Objetivo

Este capítulo está diseñado para ofrecer un repaso breve sobre algunos términos y métodos para la manipulación de las matemáticas. Sin duda usted ya estudió mucho de este material con anterioridad. Sin embargo, ya que estos temas son importantes para el manejo de las matemáticas que vienen después, tal vez resulte benéfica una rápida exposición de ellos. Destine el tiempo que sea necesario para las secciones en que necesita un repaso.

OBJETIVO Familiarizarse con conjuntos, la clasificación de los números reales y la recta de los números reales.

0.2 Conjuntos y números reales

En términos sencillos, un *conjunto* es una colección de objetos. Por ejemplo, podemos hablar del conjunto de números pares entre 5 y 11, es decir, 6, 8 y 10. Un objeto de un conjunto se conoce como *elemento* o *miembro* de ese conjunto.

Una manera de especificar un conjunto es hacer una lista de sus elementos, en cualquier orden, dentro de llaves. Por ejemplo, el conjunto anterior es $\{6, 8, 10\}$, que podemos denotar por medio de una letra, como A. Un conjunto A se dice que es un subconjunto de un conjunto B si y sólo si todo elemento de A también es un elemento de B. Por ejemplo, si $A = \{6, 8, 10\}$ y $B = \{6, 8, 10, 12\}$, entonces A es un subconjunto de B.

Ciertos conjuntos de números tienen nombres especiales. Los números 1, 2, 3, y así sucesivamente, forman el conjunto de los **enteros positivos** (o **números naturales**):

$$\textit{conjunto de enteros positivos} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Los tres puntos significan que el listado de elementos continúa sin fin, aun cuando se sabe cuáles son los elementos.

Los enteros positivos junto con el cero, y los **enteros negativos** $-1, -2, -3, \ldots$, forman el conjunto de los **enteros:**

$$\textit{conjunto de enteros} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

La razón para que $q \neq 0$, es que no podemos dividir entre cero.

Todo entero es un número racional.

El conjunto de los **números racionales** consiste en números como $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{3}$, que pueden escribirse como una razón (cociente) de dos enteros. Esto es, un número racional es aquél que puede escribirse como p/q, donde p y q son enteros y $q \neq 0$. (el símbolo "$\neq$" se lee "no es igual a" o "diferente de".) Por ejemplo, los números $\frac{19}{20}$, $\frac{-2}{7}$ y $\frac{-6}{-2}$ son racionales. Observemos que $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{-4}{-8}$ y 0.5 representan todos al mismo número racional. El entero 2 es racional ya que $2 = \frac{2}{1}$. De hecho, todo entero es racional.

Todos los números racionales pueden representarse por números decimales que *terminan*, como $\frac{3}{4} = 0.75$ y $\frac{3}{2} = 1.5$, o bien por *decimales repetidos que no terminan* (un grupo de dígitos que se repiten sin fin), como $\frac{2}{3} = 0.666\ldots$, $\frac{-4}{11} = -0.3636\ldots$ y $\frac{2}{15} = 0.1333\ldots$ Los números que se representan por decimales *no repetidos que no terminan* se conocen como **números irracionales.** Un número irracional no puede escribirse como un entero dividido entre un entero. Los números π (pi) y $\sqrt{2}$ son irracionales.

Los números reales consisten en todos los números decimales.

Juntos, los números racionales y los números irracionales forman el conjunto de los **números reales.** Los números reales pueden representarse por puntos en una recta. Primero seleccionamos un punto en la recta para representar al cero. Este punto es llamado *origen* (véase la fig. 0.1). Después se elige una medida estándar de distancia, "unidad de distancia", y se marca sucesivamente en ambas direcciones a la derecha y a la izquierda del origen. Con cada punto sobre la recta asociamos una distancia dirigida, o *número con signo,* que depende de la posición del punto con respecto al origen. Las posiciones a la derecha del origen se consideran positivas (+) y las de la izquierda negativas (−). Por ejemplo, al punto ubicado a $\frac{1}{2}$ de unidad a la derecha del

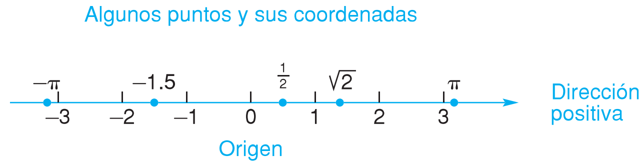


FIGURA 0.1 La recta de los números reales.

origen, le corresponde el número $\frac{1}{2}$, que se denomina **coordenada** de ese punto. En forma similar, la coordenada del punto situado a 1.5 unidades a la izquierda del origen es -1.5. En la figura 0.1 están marcadas las coordenadas de algunos puntos. La punta de la flecha indica que la dirección hacia la derecha a lo largo de la recta es positiva.

A cada punto sobre la recta le corresponde un número real único, y a cada número real le corresponde un punto único de la recta. Por esta razón decimos que hay una *correspondencia uno a uno* entre los puntos de la recta y los números reales. Llamamos a esta recta la **recta de coordenadas** o **recta de números reales.** Tenemos la libertad para tratar a los números reales como puntos sobre dicha recta y viceversa.

Ejercicio 0.2

En los problemas del 1 al 12, clasifique los enunciados como verdaderos o falsos. Si es falso, dé una razón.

1. -7 es un entero.

2. $\frac{1}{6}$ es racional.

3. -3 es un número natural.

4. 0 no es racional.

5. 5 es racional.

6. $\frac{7}{0}$ es un número racional.

7. $\sqrt{25}$ no es un entero positivo.

8. π es un número real.

9. $\frac{0}{6}$ es racional.

10. $\sqrt{3}$ es un número natural.

11. -3 está a la derecha de -4 en la recta de los números reales.

12. Todo entero es positivo o negativo.

OBJETIVO Establecer e ilustrar las propiedades siguientes de los números reales: transitiva, conmutativa, asociativa, inversa y distributiva. Definir la resta y la división en términos de la suma y la multiplicación, respectivamente.

0.3 Algunas propiedades de los números reales

Ahora establezcamos algunas propiedades importantes de los números reales. Sean a, b y c números reales.

1. Propiedad transitiva de la igualdad

$$\text{Si } a = b \text{ y } b = c, \text{ entonces } a = c.$$

Por tanto, dos números que sean iguales a un tercer número son iguales entre sí. Por ejemplo, si $x = y$ y $y = 7$, entonces $x = 7$.

2. Propiedad conmutativa de la suma y de la multiplicación

$$a + b = b + a \quad \text{y} \quad ab = ba.$$

Esto significa que dos números pueden sumarse o multiplicarse en cualquier orden. Por ejemplo, $3 + 4 = 4 + 3$ y $7(-4) = (-4)(7)$.

3. Propiedad asociativa de la suma y de la multiplicación

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{y} \quad a(bc) = (ab)c.$$

Esto significa que en la suma o multiplicación, los números pueden agruparse en cualquier orden. Por ejemplo, $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$; en ambos casos la suma es 9. En forma semejante, $2x + (x + y) = (2x + x) + y$ y $6(\frac{1}{3} \cdot 5) = (6 \cdot \frac{1}{3}) \cdot 5$.

4. Propiedades del inverso

Para cada número real a, existe un único número real denotado por $-a$ tal que,

$$a + (-a) = 0.$$

El número $-a$ es llamado el **inverso aditivo** o **negativo** de a.

Por ejemplo, ya que $6 + (-6) = 0$, el inverso aditivo de 6 es -6. El inverso aditivo de un número no necesariamente es un número negativo. Por ejemplo, el inverso aditivo de -6 es 6, ya que $(-6) + (6) = 0$. Esto es, el negativo de -6 es 6, de modo que podemos escribir $-(-6) = 6$.

Para cada número real a, excepto el cero, existe un único número real denotado por a^{-1} tal que,

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

El número a^{-1} se conoce como el **inverso multiplicativo** de a.

El cero no tiene inverso multiplicativo, ya que no existe número que cuando se multiplica por cero dé como resultado 1.

Por tanto, todos los números, con excepción del cero, tienen un inverso multiplicativo. Como se recordará, a^{-1} puede escribirse como $\frac{1}{a}$ y también se llama el *recíproco* de a. Por ejemplo, el inverso multiplicativo de 3 es $\frac{1}{3}$, ya que $3(\frac{1}{3}) = 1$. Por lo que $\frac{1}{3}$ es el recíproco de 3. El recíproco de $\frac{1}{3}$ es 3, ya que $(\frac{1}{3})(3) = 1$. **El recíproco de 0 no está definido.**

5. Propiedades distributivas

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{y} \quad (b + c)a = ba + ca.$$

Por ejemplo, aunque $2(3 + 4) = 2(7) = 14$, podemos escribir

$$2(3 + 4) = 2(3) + 2(4) = 6 + 8 = 14.$$

En la misma forma,

$$(2 + 3)(4) = 2(4) + 3(4) = 8 + 12 = 20,$$

$$\text{y } x(z + 4) = x(z) + x(4) = xz + 4x.$$

La propiedad distributiva puede ser extendida a la forma

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad.$$

De hecho, puede ser extendida para sumas con cualquier número de términos.

La **resta** se define en términos de la suma:

$$a - b \text{ significa } a + (-b),$$

en donde $-b$ es el inverso aditivo de b. Así, $6 - 8$ significa $6 + (-8)$.

En forma semejante, definimos la **división** en términos de la multiplicación. Si $b \neq 0$, entonces $a \div b$, o $\frac{a}{b}$, está definida por

$$\frac{a}{b} = a(b^{-1}).$$

Como $b^{-1} = \frac{1}{b}$,

$$\frac{a}{b} = a(b^{-1}) = a\left(\frac{1}{b}\right).$$

$\frac{a}{b}$ significa a veces el recíproco de b.

Así, $\frac{3}{5}$ significa 3 veces $\frac{1}{5}$, en donde $\frac{1}{5}$ es el inverso multiplicativo de 5. Algunas veces nos referimos a $a \div b$ o $\frac{a}{b}$ como la *razón* de a a b. Observemos que como 0 no tiene inverso multiplicativo, **la división entre 0 no está definida.**

Los ejemplos siguientes muestran algunas aplicaciones de las propiedades anteriores.

EJEMPLO 1 Aplicación de las propiedades de los números reales

a. $x(y - 3z + 2w) = (y - 3z + 2w)x$, por la propiedad conmutativa de la multiplicación.

b. Por la propiedad asociativa de la multiplicación, $3(4 \cdot 5) = (3 \cdot 4)5$. Por tanto, el resultado de multiplicar 3 por el producto de 4 y 5 es el mismo que el de multiplicar el producto de 3 y 4 por 5. En cualquier caso el resultado es 60.

EJEMPLO 2 Aplicación de las propiedades de los números reales

a. *Demostrar que* $2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2$.

Solución: por la definición de resta, $2 - \sqrt{2} = 2 + (-\sqrt{2})$. Sin embargo, por la propiedad conmutativa de la suma, $2 + (-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} + 2$. Así, por la propiedad transitiva, $2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2$. De manera más concisa, omitimos pasos intermedios y escribimos directamente

$$2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2.$$

b. *Demostrar que* $(8 + x) - y = 8 + (x - y)$.

Solución: al empezar con el lado izquierdo, tenemos

$$\begin{aligned}(8 + x) - y &= (8 + x) + (-y) && \text{(definición de la resta)}\\ &= 8 + [x + (-y)] && \text{(propiedad asociativa)}\\ &= 8 + (x - y) && \text{(definición de la resta).}\end{aligned}$$

Por lo que, por la propiedad transitiva,

$$(8 + x) - y = 8 + (x - y).$$

c. *Demostrar que* $3(4x + 2y + 8) = 12x + 6y + 24$.

Solución: por la propiedad distributiva,

$$3(4x + 2y + 8) = 3(4x) + 3(2y) + 3(8).$$

Pero por la propiedad asociativa de la multiplicación,

$$3(4x) = (3 \cdot 4)x = 12x \quad \text{y de manera similar} \quad 3(2y) = 6y.$$

Por tanto, $3(4x + 2y + 8) = 12x + 6y + 24$.

EJEMPLO 3 Aplicación de las propiedades de los números reales

a. *Demostrar que* $\dfrac{ab}{c} = a\left(\dfrac{b}{c}\right)$ *para* $c \neq 0$.

Solución: por la definición de división,

$$\frac{ab}{c} = (ab) \cdot \frac{1}{c} \text{ para } c \neq 0.$$

Pero por la propiedad asociativa,

$$(ab) \cdot \frac{1}{c} = a\left(b \cdot \frac{1}{c}\right).$$

Sin embargo, por la definición de la división, $b \cdot \dfrac{1}{c} = \dfrac{b}{c}$. Por tanto,

$$\frac{ab}{c} = a\left(\frac{b}{c}\right).$$

También podemos demostrar que $\dfrac{ab}{c} = \left(\dfrac{a}{c}\right)b$.

b. *Demostrar que* $\dfrac{a + b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$ *para* $c \neq 0$.

Solución: por la definición de la división y la propiedad distributiva,

$$\frac{a + b}{c} = (a + b)\frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c}.$$

Sin embargo,

$$a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

De aquí que,

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Observamos que $\dfrac{a}{b + c} \neq \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c}$. Por ejemplo,

$$\frac{3}{2+1} \neq \frac{3}{2} + \frac{3}{1}.$$

La única forma para determinar el producto de varios números es considerar los productos de los números tomados de 2 en 2. Por ejemplo, para encontrar el producto de x, y y z podríamos multiplicar primero x por y y después multiplicar el producto resultante por z, esto es, encontrar $(xy)z$. O, de manera alterna, multiplicar x por el producto de y y z, esto es, encontrar $x(yz)$. La propiedad asociativa de la multiplicación garantiza que ambos resultados sean idénticos, sin importar cómo se agrupen los números. Por tanto, no es ambiguo escribir xyz. Este concepto puede ampliarse a más de tres números y se aplica de la misma manera a la suma.

Es importante hacer un comentario final antes de terminar esta sección. No sólo debe tener cuidado al aplicar las propiedades de los números reales, también debe conocer y familiarizarse con la terminología involucrada.

Ejercicio 0.3

En los problemas del 1 al 10, clasifique los enunciados como verdaderos o falsos.

1. Todo número real tiene un recíproco.

2. El recíproco de $\frac{2}{5}$ es $\frac{5}{2}$.

3. El inverso aditivo de 5 es $\frac{1}{5}$.

4. $2(3 \cdot 4) = (2 \cdot 3)(2 \cdot 4)$.

5. $-x + y = -y + x$.

6. $(x + 2)(4) = 4x + 8$.

7. $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{x}{2} + 1$.

8. $3\left(\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{3x}{4}$.

9. $x + (y + 5) = (x + y) + (x + 5)$.

10. $8(9x) = 72x$.

En los problemas del 11 al 20, establezca cuál propiedad de los números reales se usa.

11. $2(x + y) = 2x + 2y$.

12. $(x + 5) + y = y + (x + 5)$.

13. $2(3y) = (2 \cdot 3)y$.

14. $\frac{6}{7} = 6 \cdot \frac{1}{7}$.

15. $2(x - y) = (x - y)(2)$.

16. $y + (x + y) = (y + x) + y$.

17. $8 - y = 8 + (-y)$.

18. $5(4 + 7) = 5(7 + 4)$.

19. $(8 + a)b = 8b + ab$.

20. $(-1)[-3 + 4] = (-1)(-3) + (-1)(4)$.

En los problemas del 21 al 26, demuestre que los enunciados son verdaderos, para ello utilice las propiedades de los números reales.

21. $5a(x + 3) = 5ax + 15a$.

22. $(2 - x) + y = 2 + (y - x)$.

23. $(x + y)(2) = 2x + 2y$.

24. $2[27 + (x + y)] = 2[(y + 27) + x]$.

25. $x[(2y + 1) + 3] = 2xy + 4x$.

26. $(x + 1)(y + z) = xy + xz + y + z$.

27. Demuestre que $a(b + c + d) = ab + ac + ad$. [*Sugerencia:* $b + c + d = (b + c) + d$.]

OBJETIVO Enlistar e ilustrar las propiedades más comunes de los números reales.

0.4 Operaciones con números reales

La lista siguiente establece las propiedades importantes de los números reales que usted debe estudiar a fondo. El ser capaz de manejar los números reales es esencial para tener éxito en matemáticas. A cada propiedad le sigue un ejemplo numérico. Todos los denominadores son diferentes de cero. Se supone que usted cuenta con un conocimiento previo de suma y resta de números reales.

	Propiedad	*Ejemplo(s)*
1.	$a - b = a + (-b).$	$2 - 7 = 2 + (-7) = -5.$
2.	$a - (-b) = a + b.$	$2 - (-7) = 2 + 7 = 9.$
3.	$-a = (-1)(a).$	$-7 = (-1)(7).$
4.	$a(b + c) = ab + ac.$	$6(7 + 2) = 6 \cdot 7 + 6 \cdot 2 = 54.$
5.	$a(b - c) = ab - ac.$	$6(7 - 2) = 6 \cdot 7 - 6 \cdot 2 = 30.$
6.	$-(a + b) = -a - b.$	$-(7 + 2) = -7 - 2 = -9.$
7.	$-(a - b) = -a + b.$	$-(2 - 7) = -2 + 7 = 5.$
8.	$-(-a) = a.$	$-(-2) = 2.$
9.	$a(0) = 0.$	$2(0) = 0.$
10.	$(-a)(b) = -(ab) = a(-b).$	$(-2)(7) = -(2 \cdot 7) = 2(-7) = -14.$
11.	$(-a)(-b) = ab.$	$(-2)(-7) = 2 \cdot 7 = 14.$
12.	$\frac{a}{1} = a.$	$\frac{7}{1} = 7, \frac{-2}{1} = -2.$
13.	$\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right).$	$\frac{2}{7} = 2\left(\frac{1}{7}\right).$
14.	$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}.$	$\frac{2}{-7} = -\frac{2}{7} = \frac{-2}{7}.$
15.	$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}.$	$\frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}.$
16.	$\frac{0}{a} = 0$ cuando $a \neq 0.$	$\frac{0}{7} = 0.$
17.	$\frac{a}{a} = 1$ cuando $a \neq 0.$	$\frac{2}{2} = 1, \frac{-5}{-5} = 1.$
18.	$a\left(\frac{b}{a}\right) = b.$	$2\left(\frac{7}{2}\right) = 7.$
19.	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$ cuando $a \neq 0.$	$2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$
20.	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}.$
21.	$\frac{ab}{c} = \left(\frac{a}{c}\right)b = a\left(\frac{b}{c}\right).$	$\frac{2 \cdot 7}{3} = \frac{2}{3} \cdot 7 = 2 \cdot \frac{7}{3}.$
22.	$\frac{a}{bc} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1}{c}\right) = \left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{a}{c}\right).$	$\frac{2}{3 \cdot 7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7}.$
23.	$\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{c}\right) = \frac{ac}{bc}$ cuando $c \neq 0.$	$\frac{2}{7} = \left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{5}{5}\right) = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 5}.$
24.	$\frac{a}{b(-c)} = \frac{a}{(-b)(c)} = \frac{-a}{bc} = \frac{-a}{(-b)(-c)} = -\frac{a}{bc}.$	$\frac{2}{3(-5)} = \frac{2}{(-3)(5)} = \frac{-2}{3(5)} = \frac{-2}{(-3)(-5)} = -\frac{2}{3(5)} = -\frac{2}{15}.$

Propiedad	Ejemplo(s)
25. $\dfrac{a(-b)}{c} = \dfrac{(-a)b}{c} = \dfrac{ab}{-c} = \dfrac{(-a)(-b)}{-c} = -\dfrac{ab}{c}.$	$\dfrac{2(-3)}{5} = \dfrac{(-2)(3)}{5} = \dfrac{2(3)}{-5} = \dfrac{(-2)(-3)}{-5} = -\dfrac{2(3)}{5} = -\dfrac{6}{5}.$
26. $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}.$	$\dfrac{2}{9} + \dfrac{3}{9} = \dfrac{2+3}{9} = \dfrac{5}{9}.$
27. $\dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{c} = \dfrac{a-b}{c}.$	$\dfrac{2}{9} - \dfrac{3}{9} = \dfrac{2-3}{9} = \dfrac{-1}{9}.$
28. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}.$	$\dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4\cdot 3 + 5\cdot 2}{5\cdot 3} = \dfrac{22}{15}.$
29. $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad-bc}{bd}.$	$\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4\cdot 3 - 5\cdot 2}{5\cdot 3} = \dfrac{2}{15}.$
30. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}.$	$\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}} = \dfrac{2}{3} \div \dfrac{7}{5} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5}{7} = \dfrac{2\cdot 5}{3\cdot 7} = \dfrac{10}{21}.$
31. $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = a \div \dfrac{b}{c} = a\cdot\dfrac{c}{b} = \dfrac{ac}{b}.$	$\dfrac{2}{\frac{3}{5}} = 2 \div \dfrac{3}{5} = 2\cdot\dfrac{5}{3} = \dfrac{2\cdot 5}{3} = \dfrac{10}{3}.$
32. $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b} \div c = \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{1}{c} = \dfrac{a}{bc}.$	$\dfrac{\frac{2}{3}}{5} = \dfrac{2}{3} \div 5 = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{3\cdot 5} = \dfrac{2}{15}.$

La propiedad 23 es esencialmente el **principio fundamental de las fracciones,** el cual establece que *multiplicar o dividir el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número, excepto el cero, tiene como resultado una fracción equivalente a* (*esto es, que tiene el mismo valor que*) *la fracción original*. Así,

$$\frac{7}{\frac{1}{8}} = \frac{7\cdot 8}{\frac{1}{8}\cdot 8} = \frac{56}{1} = 56.$$

Por las propiedades 28 y 23 tenemos

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{2\cdot 15 + 5\cdot 4}{5\cdot 15} = \frac{50}{75} = \frac{2\cdot 25}{3\cdot 25} = \frac{2}{3}.$$

También podemos resolver este problema convirtiendo $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{15}$ en fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador y después utilizar la propiedad 26. Las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{15}$, pueden escribirse con un denominador común de $5\cdot 15$,

$$\frac{2}{5} = \frac{2\cdot 15}{5\cdot 15} \text{ y } \frac{4}{15} = \frac{4\cdot 5}{15\cdot 5}.$$

Sin embargo, 15 es el *menor* de dichos denominadores comunes, el cual se conoce como el *mínimo común denominador* (MCD) de $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{15}$. Por tanto,

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{2\cdot 3}{5\cdot 3} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6+4}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

Del mismo modo,

$$\begin{aligned}\frac{3}{8}-\frac{5}{12}&=\frac{3\cdot 3}{8\cdot 3}-\frac{5\cdot 2}{12\cdot 2} \qquad (\text{MCD} = 24)\\ &=\frac{9}{24}-\frac{10}{24}=\frac{9-10}{24}\\ &=-\frac{1}{24}.\end{aligned}$$

Ejercicio 0.4

Simplifique, si es posible, cada una de las siguientes expresiones.

1. $-2+(-4)$.	**2.** $-6+2$.	**3.** $6+(-4)$.	**4.** $7-2$.
5. $7-(-4)$.	**6.** $-6-(-11)$.	**7.** $-8-(-6)$.	**8.** $(-2)(9)$.
9. $7(-9)$.	**10.** $(-2)(-12)$.	**11.** $(-1)6$.	**12.** $-(-9)$.
13. $-(-6+x)$.	**14.** $-7(x)$.	**15.** $-12(x-y)$.	**16.** $-[-6+(-y)]$.
17. $-3\div 15$.	**18.** $-2\div(-4)$.	**19.** $4\div(-2)$.	**20.** $2(-6+2)$.
21. $3[-2(3)+6(2)]$.	**22.** $(-2)(-4)(-1)$.	**23.** $(-8)(-8)$.	**24.** $x(0)$.
25. $3(x-4)$.	**26.** $4(5+x)$.	**27.** $-(x-2)$.	**28.** $0(-x)$.
29. $8\left(\frac{1}{11}\right)$.	**30.** $\frac{7}{1}$.	**31.** $\frac{-5x}{7y}$.	**32.** $\frac{3}{-2x}$.
33. $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}$.	**34.** $\frac{a}{c}(3b)$.	**35.** $(2x)\left(\frac{3}{2x}\right)$.	**36.** $\frac{-18y}{-3x}$.
37. $\frac{7}{y}\cdot\frac{1}{x}$.	**38.** $\frac{2}{x}\cdot\frac{5}{y}$.	**39.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.	**40.** $\frac{5}{12}+\frac{3}{4}$.
41. $\frac{3}{10}-\frac{7}{15}$.	**42.** $\frac{2}{3}+\frac{7}{3}$.	**43.** $\frac{x}{9}-\frac{y}{9}$.	**44.** $\frac{3}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$.
45. $\frac{2}{5}-\frac{3}{8}$.	**46.** $\dfrac{6}{\frac{x}{y}}$.	**47.** $\dfrac{\frac{k}{9}}{n}$.	**48.** $\dfrac{\frac{-5}{4}}{\frac{7}{10}}$.
49. $\frac{7}{0}$.	**50.** $\frac{0}{7}$.	**51.** $\frac{0}{0}$.	**52.** $0\cdot 0$.

OBJETIVO Revisar los exponentes enteros positivos, el exponente cero, los exponentes enteros negativos, los exponentes racionales, las raíces principales, los radicales y el procedimiento de racionalización del denominador.

0.5 Exponentes y radicales

El producto de $x\cdot x\cdot x$ se abrevia x^3. En general, para un entero positivo n, x^n es la abreviatura del producto de n factores, cada uno de los cuales es x. La letra n en x^n se denomina *exponente* y a x se le llama *base*. Específicamente, si n es un entero positivo tenemos:

1. $x^n=\underbrace{x\cdot x\cdot x\cdot\ \ldots\ \cdot x}_{n\text{ factores}}.$

2. $x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}=\dfrac{1}{\underbrace{x\cdot x\cdot x\cdot\ \ldots\ \cdot x}_{n\text{ factores}}}.$

3. $\dfrac{1}{x^{-n}} = x^n.$

4. $x^0 = 1$ si $x \neq 0$. 0^0 no está definido.

EJEMPLO 1 **Exponentes**

a. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{16}.$

b. $3^{-5} = \dfrac{1}{3^5} = \dfrac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \dfrac{1}{243}.$

c. $\dfrac{1}{3^{-5}} = 3^5 = 243.$

d. $2^0 = 1$, $\pi^0 = 1$, $(-5)^0 = 1$.

e. $x^1 = x$.

Si $r^n = x$, donde n es un entero positivo, entonces r es una *raíz n-ésima* de x. Por ejemplo, $3^2 = 9$ y así 3 es una raíz segunda de 9 (por lo común llamada una *raíz cuadrada*) de 9. Como $(-3)^2 = 9$, -3 también es una raíz cuadrada de 9. De modo similar, -2 es una *raíz cúbica* de -8, ya que $(-2)^3 = -8$.

Algunos números no tienen una raíz n-ésima que sea un número real. Por ejemplo, como el cuadrado de cualquier número real es no negativo, no existe número real que sea una raíz cuadrada de -4.

La **raíz *n*-ésima principal** de x es la raíz n-ésima de x que sea positiva si x es positiva, y es la raíz n-ésima negativa si x es negativa y n es impar. Esta raíz la denotamos mediante $\sqrt[n]{x}$. Así,

$$\sqrt[n]{x} \text{ es } \begin{cases} \text{positiva si } x \text{ es positiva,} \\ \text{negativa si } x \text{ es negativa y } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por ejemplo, $\sqrt[2]{9} = 3$, $\sqrt[3]{-8} = -2$ y $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$. Definimos $\sqrt[n]{0} = 0$.

El símbolo $\sqrt[n]{x}$ se denomina **radical,** Aquí n es el *índice*, x es el *radicando* y $\sqrt{}$ es el *signo radical*. Con las raíces cuadradas principales, por lo regular omitimos el índice y escribimos $\sqrt{x}$ en lugar de $\sqrt[2]{x}$. Por tanto, $\sqrt{9} = 3$.

Advertencia Aunque 2 y -2 son raíces cuadradas de 4, la raíz cuadrada **principal** de 4 es 2, no -2. Por lo que, $\sqrt{4} = 2$.

Si x es positiva, la expresión $x^{p/q}$, en donde p y q son enteros y q es positiva, se define como $\sqrt[q]{x^p}$. Por lo que,

$$x^{3/4} = \sqrt[4]{x^3};\quad 8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4;$$

$$4^{-1/2} = \sqrt[2]{4^{-1}} = \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}.$$

A continuación se presentan las leyes básicas de los exponentes y radicales:[1]

Ley	*Ejemplo(s)*
1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.	$2^3 \cdot 2^5 = 2^8 = 256$; $x^2 \cdot x^3 = x^5$.
2. $x^0 = 1$ si $x \neq 0$.	$2^0 = 1$.
3. $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.	$2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$.
4. $\dfrac{1}{x^{-n}} = x^n$.	$\dfrac{1}{2^{-3}} = 2^3 = 8$; $\dfrac{1}{x^{-5}} = x^5$.
5. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = \dfrac{1}{x^{n-m}}$.	$\dfrac{2^{12}}{2^8} = 2^4 = 16$; $\dfrac{x^8}{x^{12}} = \dfrac{1}{x^4}$.
6. $\dfrac{x^m}{x^m} = 1$.	$\dfrac{2^4}{2^4} = 1$.
7. $(x^m)^n = x^{mn}$.	$(2^3)^5 = 2^{15}$; $(x^2)^3 = x^6$.
8. $(xy)^n = x^n y^n$.	$(2 \cdot 4)^3 = 2^3 \cdot 4^3 = 8 \cdot 64 = 512$.
9. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$.	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{2^3}{3^3}$; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^5 = \dfrac{1^5}{3^5} = \dfrac{1}{3^5} = 3^{-5}$.
10. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^n$.	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}$.
11. $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$.	$3^{1/5} = \sqrt[5]{3}$.
12. $x^{-1/n} = \dfrac{1}{x^{1/n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$.	$4^{-1/2} = \dfrac{1}{4^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$.
13. $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$.	$\sqrt[3]{9}\,\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{18}$.
14. $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$.	$\dfrac{\sqrt[3]{90}}{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{\dfrac{90}{10}} = \sqrt[3]{9}$.
15. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$.	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$.
16. $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$.	$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$.
17. $(\sqrt[m]{x})^m = x$.	$(\sqrt[8]{7})^8 = 7$.

Cuando calculamos $x^{m/n}$, con frecuencia es más fácil determinar primero $\sqrt[n]{x}$ y luego elevar el resultado a la potencia m-ésima. Así, $(-27)^{4/3} = (\sqrt[3]{-27})^4 = (-3)^4 = 81$.

EJEMPLO 2 Exponentes y radicales

a. Por la ley 1,

$$x^6x^8 = x^{6+8} = x^{14},$$

$$a^3b^2a^5b = a^3a^5b^2b^1 = a^8b^3,$$

$$x^{11}x^{-5} = x^{11-5} = x^6,$$

$$z^{2/5}z^{3/5} = z^1 = z,$$

$$xx^{1/2} = x^1x^{1/2} = x^{3/2}.$$

[1]Aunque algunas leyes incluyen restricciones, éstas no son vitales para nuestro estudio.

b. Por la ley 16,

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{3/2} = \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

c. $$\left(-\frac{8}{27}\right)^{4/3} = \left(\sqrt[3]{\frac{-8}{27}}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}}\right)^4 \qquad \text{(Leyes 16 y 14)}$$

$$= \left(\frac{-2}{3}\right)^4$$

$$= \frac{(-2)^4}{3^4} = \frac{16}{81} \qquad \text{(Ley 9)}$$

d. $$(64a^3)^{2/3} = 64^{2/3}(a^3)^{2/3} \qquad \text{(Ley 8)}$$

$$= (\sqrt[3]{64})^2 a^2 \qquad \text{(Leyes 16 y 7)}$$

$$= (4)^2 a^2 = 16a^2.$$

La *racionalización del denominador* de una fracción es un procedimiento en el que una fracción que tiene un radical en su denominador se expresa como una fracción equivalente sin radical en su denominador. Para hacer esto utilizamos el principio fundamental de las fracciones, como lo muestra el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Racionalización de denominadores

a. $$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5^{1/2}} = \frac{2\cdot 5^{1/2}}{5^{1/2}\cdot 5^{1/2}} = \frac{2\cdot 5^{1/2}}{5^1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

b. $$\frac{2}{\sqrt[6]{3x^5}} = \frac{2}{\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[6]{x^5}} = \frac{2}{3^{1/6}x^{5/6}} = \frac{2\cdot 3^{5/6}x^{1/6}}{3^{1/6}x^{5/6}\cdot 3^{5/6}x^{1/6}}$$

$$= \frac{2(3^5x)^{1/6}}{3x} = \frac{2\sqrt[6]{3^5x}}{3x}.$$

Los ejemplos siguientes ilustran varias aplicaciones de las leyes de los exponentes y radicales.

EJEMPLO 4 Exponentes

a. *Elimine los exponentes negativos en* $\dfrac{x^{-2}y^3}{z^{-2}}$.

Solución:

$$\frac{x^{-2}y^3}{z^{-2}} = x^{-2}\cdot y^3 \cdot \frac{1}{z^{-2}} = \frac{1}{x^2}\cdot y^3 \cdot z^2 = \frac{y^3z^2}{x^2}.$$

Al comparar nuestra respuesta con la expresión original, concluimos que podemos llevar un factor del numerador al denominador, y viceversa, cambiando el signo del exponente.

b. *Simplifique* $\dfrac{x^2y^7}{x^3y^5}$.

Solución:

$$\frac{x^2y^7}{x^3y^5} = \frac{y^{7-5}}{x^{3-2}} = \frac{y^2}{x}.$$

c. *Simplifique* $(x^5y^8)^5$.

Solución:

$$(x^5y^8)^5 = (x^5)^5(y^8)^5 = x^{25}y^{40}.$$

d. *Simplifique* $(x^{5/9}y^{4/3})^{18}$.

Solución:

$$(x^{5/9}y^{4/3})^{18} = (x^{5/9})^{18}(y^{4/3})^{18} = x^{10}y^{24}.$$

e. *Simplifique* $\left(\frac{x^{1/5}y^{6/5}}{z^{2/5}}\right)^5$.

Solución:

$$\left(\frac{x^{1/5}y^{6/5}}{z^{2/5}}\right)^5 = \frac{(x^{1/5}y^{6/5})^5}{(z^{2/5})^5} = \frac{xy^6}{z^2}.$$

f. *Simplifique* $\frac{x^3}{y^2} \div \frac{x^6}{y^5}$.

Solución:

$$\frac{x^3}{y^2} \div \frac{x^6}{y^5} = \frac{x^3}{y^2} \cdot \frac{y^5}{x^6} = \frac{y^3}{x^3}.$$

EJEMPLO 5 Exponentes

a. *Elimine los exponentes negativos de* $x^{-1} + y^{-1}$ *y simplifique.*

Solución:

$$x^{-1} + y^{-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y + x}{xy}.$$

$$\left(Nota\text{: } x^{-1} + y^{-1} \neq \frac{1}{x + y}.\right)$$

b. *Simplifique* $x^{3/2} - x^{1/2}$ *usando la ley distributiva.*

Solución:

$$x^{3/2} - x^{1/2} = x^{1/2}(x - 1).$$

c. *Elimine los exponentes negativos en* $7x^{-2} + (7x)^{-2}$.

Solución:

$$7x^{-2} + (7x)^{-2} = \frac{7}{x^2} + \frac{1}{(7x)^2} = \frac{7}{x^2} + \frac{1}{49x^2}.$$

d. *Elimine los exponentes negativos en* $(x^{-1} - y^{-1})^{-2}$.

Solución:

$$(x^{-1} - y^{-1})^{-2} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^{-2} = \left(\frac{y - x}{xy}\right)^{-2}$$
$$= \left(\frac{xy}{y - x}\right)^{2} = \frac{x^2y^2}{(y - x)^2}.$$

e. *Aplique la ley distributiva a* $x^{2/5}(y^{1/2} + 2x^{6/5})$.

Solución:

$$x^{2/5}(y^{1/2} + 2x^{6/5}) = x^{2/5}y^{1/2} + 2x^{8/5}.$$

EJEMPLO 6 Radicales

a. *Simplifique* $\sqrt[4]{48}$.

Solución:

$$\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{16}\,\sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3}.$$

b. *Reescriba* $\sqrt{2 + 5x}$ *sin utilizar el signo de radical.*

Solución:

$$\sqrt{2 + 5x} = (2 + 5x)^{1/2}.$$

c. *Racionalice el denominador de* $\dfrac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{6}}$ *y simplifique.*

Solución:

$$\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{2^{1/5} \cdot 6^{2/3}}{6^{1/3} \cdot 6^{2/3}} = \frac{2^{3/15}6^{10/15}}{6} = \frac{(2^3 6^{10})^{1/15}}{6} = \frac{\sqrt[15]{2^3 6^{10}}}{6}.$$

d. *Simplifique* $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$.

Solución:

$$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2.$$

EJEMPLO 7 Radicales

a. *Simplifique* $\sqrt[3]{x^6y^4}$.

Solución:

$$\sqrt[3]{x^6y^4} = \sqrt[3]{(x^2)^3y^3y} = \sqrt[3]{(x^2)^3} \cdot \sqrt[3]{y^3} \cdot \sqrt[3]{y}$$
$$= x^2y\sqrt[3]{y} \qquad \text{(Ley 17).}$$

b. *Simplifique* $\sqrt{\frac{2}{7}}$.

Solución:

$$\sqrt{\frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{2\cdot 7}{7\cdot 7}} = \sqrt{\frac{14}{7^2}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{14}}{7}.$$

c. *Simplifique* $\sqrt{250} - \sqrt{50} + 15\sqrt{2}$.

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt{250} - \sqrt{50} + 15\sqrt{2} &= \sqrt{25\cdot 10} - \sqrt{25\cdot 2} + 15\sqrt{2}\\ &= 5\sqrt{10} - 5\sqrt{2} + 15\sqrt{2}\\ &= 5\sqrt{10} + 10\sqrt{2}.\end{aligned}$$

d. *Si x es cualquier número real, simplifique* $\sqrt{x^2}$.

Nota: $\sqrt{x^2} \neq x$.

Solución:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{si } x \text{ es positivo,}\\ -x, & \text{si } x \text{ es negativo,}\\ 0, & \text{si } x = 0.\end{cases}$$

Por tanto, $\sqrt{2^2} = 2$ y $\sqrt{(-3)^2} = -(-3) = 3$.

Ejercicio 0.5

En los problemas del 1 al 14, simplifique y exprese todas las respuestas en términos de exponentes positivos.

1. $(2^3)(2^2)$.
2. x^6x^9.
3. w^4w^8.
4. $x^6x^4x^3$.
5. $\frac{x^2x^6}{y^7y^{10}}$.
6. $(x^{12})^4$.
7. $\frac{(a^3)^7}{(b^4)^5}$.
8. $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^5$.
9. $(2x^2y^3)^3$.
10. $\left(\frac{w^2s^3}{y^2}\right)^2$.
11. $\frac{x^8}{x^2}$.
12. $\left(\frac{3m^3}{9n^2}\right)^5$.
13. $\frac{(x^3)^6}{x(x^3)}$.
14. $\frac{(x^2)^3(x^3)^2}{(x^3)^4}$.

En los problemas del 15 al 28, evalúe las expresiones.

15. $\sqrt{25}$.
16. $\sqrt[3]{64}$.
17. $\sqrt[5]{-32}$.
18. $\sqrt{0.04}$.
19. $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$.
20. $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$.
21. $(49)^{1/2}$.
22. $(64)^{1/3}$.
23. $4^{3/2}$.
24. $(25)^{-3/2}$.
25. $(32)^{-2/5}$.
26. $(0.09)^{-1/2}$.
27. $\left(\frac{1}{32}\right)^{4/5}$.
28. $\left(-\frac{27}{64}\right)^{2/3}$.

En los problemas del 29 al 40, simplifique las expresiones.

29. $\sqrt{32}$. **30.** $\sqrt[3]{54}$. **31.** $\sqrt[3]{2x^3}$.

32. $\sqrt{4x}$. **33.** $\sqrt{16x^4}$. **34.** $\sqrt[4]{\dfrac{x}{16}}$.

35. $2\sqrt{75} - 4\sqrt{27} + \sqrt[3]{128}$. **36.** $\sqrt{\frac{5}{11}}$. **37.** $(9z^4)^{1/2}$.

38. $(16y^8)^{3/4}$. **39.** $\left(\dfrac{27t^3}{8}\right)^{2/3}$. **40.** $\left(\dfrac{625}{a^8}\right)^{-3/4}$.

En los problemas del 41 al 52, escriba las expresiones sólo en términos de exponentes positivos. Evite todos los radicales en la forma final. Por ejemplo:

$$y^{-1}\sqrt{x} = \frac{x^{1/2}}{y}.$$

41. $\dfrac{x^3y^{-2}}{z^2}$. **42.** $\sqrt[5]{x^2y^3z^{-10}}$. **43.** $5m^{-2}m^{-7}$. **44.** $x + y^{-1}$.

45. $(3t)^{-2}$. **46.** $(3 - z)^{-4}$. **47.** $\sqrt[3]{7s^2}$. **48.** $(x^{-2}y^2)^{-2}$.

49. $\sqrt{x} - \sqrt{y}$. **50.** $\dfrac{u^{-2}v^{-6}w^3}{vw^{-5}}$. **51.** $x^2\sqrt[4]{xy^{-2}z^3}$. **52.** $(\sqrt[5]{xy^{-3}})x^{-1}y^{-2}$.

En los problemas del 53 al 58, escriba las formas exponenciales en una forma equivalente que involucre radicales.

53. $(8x - y)^{4/5}$. **54.** $(ab^2c^3)^{3/4}$. **55.** $x^{-4/5}$.

56. $2x^{1/2} - (2y)^{1/2}$. **57.** $3w^{-3/5} - (3w)^{-3/5}$. **58.** $[(x^{-4})^{1/5}]^{1/6}$.

En los problemas del 59 al 68, racionalice los denominadores.

59. $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$. **60.** $\dfrac{5}{\sqrt[3]{9}}$. **61.** $\dfrac{4}{\sqrt{2x}}$. **62.** $\dfrac{y}{\sqrt{2y}}$.

63. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x}}$. **64.** $\dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **65.** $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$. **66.** $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$.

67. $\dfrac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[4]{a^2b}}$. **68.** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$.

En los problemas del 69 al 90, simplifique. Exprese todas las respuestas en términos de exponentes positivos. En donde sea necesario, racionalice el denominador con el fin de evitar exponentes fraccionarios en el denominador.

69. $2x^2y^{-3}x^4$. **70.** $\dfrac{3}{u^{5/2}v^{1/2}}$. **71.** $\sqrt{\sqrt[3]{t^4}}$. **72.** $\{[(2x^2)^3]^{-4}\}^{-1}$.

73. $\dfrac{2^0}{(2^{-2}x^{1/2}y^{-2})^3}$. **74.** $\dfrac{\sqrt{s^5}}{\sqrt[3]{s^2}}$. **75.** $\sqrt[3]{x^2yz^3}\,\sqrt[3]{xy^2}$. **76.** $(\sqrt[5]{2})^{10}$.

77. $3^2(81)^{-3/4}$. **78.** $(\sqrt[5]{x^2y})^{2/5}$. **79.** $(2x^{-1}y^2)^2$. **80.** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{y}\,\sqrt[4]{x}}$.

81. $\sqrt{x}\sqrt{x^2y^3}\sqrt{xy^2}$. **82.** $\sqrt{75k^4}$. **83.** $\dfrac{(x^2y^{-1}z)^{-2}}{(xy^2)^{-4}}$. **84.** $\sqrt[3]{5(25)}$.

85. $\dfrac{(x^2)^3}{x^4} \div \left[\dfrac{x^3}{(x^3)^2}\right]^2$. **86.** $\sqrt{(-6)(-6)}$. **87.** $-\dfrac{8s^{-2}}{2s^3}$. **88.** $(x^{-1}y^{-2}\sqrt{z})^4$.

89. $(2x^2y \div 3y^3z^{-2})^2$. **90.** $\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{2x^{-2}}}{\sqrt{16x^3}}\right)^2}$.

OBJETIVO Sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones algebraicas. Definir lo que es un polinomio, utilizar productos especiales y emplear la división larga para dividir polinomios.

0.6 Operaciones con expresiones algebraicas

Cuando se combinan números, representados por símbolos, mediante operaciones de suma, resta, multiplicación, división o extracción de raíces, entonces la expresión resultante se llama *expresión algebraica*.

EJEMPLO 1 Expresiones algebraicas

a. $\sqrt[3]{\dfrac{3x^3 - 5x - 2}{10 - x}}$ es una expresión algebraica en la variable x.

b. $10 - 3\sqrt{y} + \dfrac{5}{7 + y^2}$ es una expresión algebraica en la variable y.

c. $\dfrac{(x + y)^3 - xy}{y} + 2$ es una expresión algebraica en las variables x y y.

La expresión algebraica $5ax^3 - 2bx + 3$ consiste de tres *términos:* $+5ax^3, -2bx$ y $+3$. Algunos de los *factores* del primer término, $5ax^3$, son $5, a, x, x^2, x^3, 5ax$ y ax^2. También, $5a$ es el coeficiente de x^3 y 5 es el *coeficiente numérico* de ax^3. Si en un análisis a y b representan números fijos, entonces a a y b se les denomina *constantes*.

Las expresiones algebraicas que tienen exactamente un término se denominan *monomios*. Aquéllas que tienen exactamente dos términos son *binomios* y las que tienen exactamente tres términos son *trinomios*. Las expresiones algebraicas con más de un término se denominan *multinomios*. Así, el multinomio $2x - 5$ es un binomio; el multinomio $3\sqrt{y} + 2y - 4y^2$ es un trinomio.

Un *polinomio en x* es una expresión algebraica de la forma[2]

$$c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

en donde n es un entero no negativo y los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son constantes con $c_n \neq 0$. Llamamos a n el *grado* del polinomio. Por lo que, $4x^3 - 5x^2 + x - 2$ es un polinomio en x de grado 3 y $y^5 - 2$ es un polinomio en y de grado 5. Una constante distinta de cero es un polinomio de grado cero, así 5 es un polinomio de grado cero. La constante 0 se considera un polinomio, sin embargo, no se le asigna grado alguno.

Las palabras *polinomio* y *multinomio* no deben utilizarse en forma indistinta. Por ejemplo, $\sqrt{x} + 2$ es un multinomio, pero no un polinomio. Por otra parte, $x + 2$ es un multinomio y un polinomio.

En los ejemplos siguientes ilustraremos las operaciones con expresiones algebraicas.

EJEMPLO 2 Suma de expresiones algebraicas

Simplifique $(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3)$.

Solución: primero debemos eliminar los paréntesis. Después, usando la propiedad conmutativa de la suma, reunimos todos los términos semejantes. *Términos semejantes* son los que sólo difieren por sus coeficientes numéricos. En este ejemplo, $3x^2y$ y $4x^2y$ son semejantes, así como las parejas $-2x$ y $6x$, y 1 y -3. Por tanto,

$$(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3)$$

[2]Los tres puntos indican los términos que se entiende serán incluidos en la suma.

$$= 3x^2y - 2x + 1 + 4x^2y + 6x - 3$$

$$= 3x^2y + 4x^2y - 2x + 6x + 1 - 3.$$

Por la propiedad distributiva,

$$3x^2y + 4x^2y = (3 + 4)x^2y = 7x^2y$$

$$\text{y } -2x + 6x = (-2 + 6)x = 4x.$$

De aquí que, $(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3) = 7x^2y + 4x - 2.$

EJEMPLO 3 Sustracción de expresiones algebraicas

Simplifique $(3x^2y - 2x + 1) - (4x^2y + 6x - 3)$.

Solución: aquí aplicamos la definición de la sustracción y la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}
&(3x^2y - 2x + 1) - (4x^2y + 6x - 3) \\
&= (3x^2y - 2x + 1) + (-1)(4x^2y + 6x - 3) \\
&= (3x^2y - 2x + 1) + (-4x^2y - 6x + 3) \\
&= 3x^2y - 2x + 1 - 4x^2y - 6x + 3 \\
&= 3x^2y - 4x^2y - 2x - 6x + 1 + 3 \\
&= (3 - 4)x^2y + (-2 - 6)x + 1 + 3 \\
&= -x^2y - 8x + 4.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Eliminación de los símbolos de agrupación

Simplifique $3\{2x[2x + 3] + 5[4x^2 - (3 - 4x)]\}$.

Solución: primero debemos eliminar los símbolos de agrupación más internos (los paréntesis). Después repetimos el proceso hasta eliminar todos los símbolos de agrupación, reduciendo los términos semejantes siempre que sea posible. Tenemos,

$$\begin{aligned}
&3\{2x[2x + 3] + 5[4x^2 - (3 - 4x)]\} \\
&= 3\{2x[2x + 3] + 5[4x^2 - 3 + 4x]\} \\
&= 3\{4x^2 + 6x + 20x^2 - 15 + 20x\} \\
&= 3\{24x^2 + 26x - 15\} \\
&= 72x^2 + 78x - 45.
\end{aligned}$$

La propiedad distributiva es la herramienta clave al multiplicar expresiones. Por ejemplo, para multiplicar $ax + c$ por $bx + d$, podemos considerar $ax + c$ como un solo número y entonces utilizar la propiedad distributiva:

$$(ax + c)(bx + d) = (ax + c)bx + (ax + c)d.$$

Usando nuevamente la propiedad distributiva, tenemos,

$$\begin{aligned}(ax + c)bx + (ax + c)d &= abx^2 + cbx + adx + cd\\ &= abx^2 + (ad + cb)x + cd.\end{aligned}$$

Por lo que, $(ax + c)(bx + d) = abx^2 + (ad + cb)x + cd$. En particular, si $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$ y $d = -2$, entonces

$$\begin{aligned}(2x + 3)(x - 2) &= 2(1)x^2 + [2(-2) + 3(1)]x + 3(-2)\\ &= 2x^2 - x - 6.\end{aligned}$$

A continuación damos una lista de productos especiales que pueden obtenerse a partir de la propiedad distributiva y son útiles al multiplicar expresiones algebraicas.

Productos especiales

1. $x(y + z) = xy + xz$ (propiedad distributiva).
2. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$.
3. $(ax + c)(bx + d) = abx^2 + (ad + cb)x + cd$.
4. $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ (cuadrado de un binomio).
5. $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ (cuadrado de un binomio).
6. $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$ (producto de suma y diferencia).
7. $(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ (cubo de un binomio).
8. $(x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$ (cubo de un binomio).

EJEMPLO 5 Productos especiales

a. Por la regla 2,

$$\begin{aligned}(x + 2)(x - 5) &= [x + 2][x + (-5)]\\ &= x^2 + (2 - 5)x + 2(-5)\\ &= x^2 - 3x - 10.\end{aligned}$$

b. Por la regla 3,

$$\begin{aligned}(3z + 5)(7z + 4) &= 3 \cdot 7z^2 + (3 \cdot 4 + 5 \cdot 7)z + 5 \cdot 4\\ &= 21z^2 + 47z + 20.\end{aligned}$$

c. Por la regla 5,

$$\begin{aligned}(x - 4)^2 &= x^2 - 2(4)x + 4^2\\ &= x^2 - 8x + 16.\end{aligned}$$

d. Por la regla 6,

$$\begin{aligned}(\sqrt{y^2 + 1} + 3)(\sqrt{y^2 + 1} - 3) &= (\sqrt{y^2 + 1})^2 - 3^2\\ &= (y^2 + 1) - 9\\ &= y^2 - 8.\end{aligned}$$

e. Por la regla 7,

$$\begin{aligned}(3x+2)^3 &= (3x)^3 + 3(2)(3x)^2 + 3(2)^2(3x) + (2)^3\\ &= 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8.\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 **Multiplicación de multinomios**

Encuentre el producto $(2t-3)(5t^2+3t-1)$.

Solución: tratamos a $2t-3$ como un solo número y aplicamos la propiedad distributiva dos veces:

$$\begin{aligned}(2t-3)(5t^2+3t-1) &= (2t-3)5t^2 + (2t-3)3t - (2t-3)1\\ &= 10t^3 - 15t^2 + 6t^2 - 9t - 2t + 3\\ &= 10t^3 - 9t^2 - 11t + 3.\end{aligned}$$

En el ejemplo 3b de la sección 0.3, mostramos que $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$. Del mismo modo, $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$. Usando estos resultados, podemos dividir un multinomio entre un monomio, si dividimos cada término del multinomio entre el monomio.

EJEMPLO 7 **División de un multinomio entre un monomio**

a. $\dfrac{x^3+3x}{x} = \dfrac{x^3}{x} + \dfrac{3x}{x} = x^2 + 3.$

b. $$\begin{aligned}\frac{4z^3 - 8z^2 + 3z - 6}{2z} &= \frac{4z^3}{2z} - \frac{8z^2}{2z} + \frac{3z}{2z} - \frac{6}{2z}\\ &= 2z^2 - 4z + \frac{3}{2} - \frac{3}{z}.\end{aligned}$$

División larga

Para dividir un polinomio entre un polinomio usamos la llamada división larga cuando el grado del divisor es menor o igual que el del dividendo, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 8 **División larga**

Divida $2x^3 - 14x - 5$ *entre* $x - 3$.

Solución: aquí $2x^3 - 14x - 5$ es el *dividendo* y $x - 3$ es el *divisor*. Para evitar errores, es mejor escribir el dividendo como $2x^3 + 0x^2 - 14x - 5$. Observe que las potencias de x están en orden decreciente. Tenemos

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 6x + 4 \leftarrow \text{cociente} \\
\cline{2-2}
x - 3 & 2x^3 + 0x^2 - 14x - 5 \\
 & \underline{2x^3 - 6x^2} \\
 & \qquad 6x^2 - 14x \\
 & \qquad \underline{6x^2 - 18x} \\
 & \qquad\qquad\quad 4x - 5 \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{4x - 12} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 7 \leftarrow \text{residuo.}
\end{array}
$$

Observe que dividimos x (el primer término del divisor) entre $2x^3$ y obtuvimos $2x^2$. Después multiplicamos $2x^2$ por $x - 3$, obteniendo $2x^3 - 6x^2$. Después de restar $2x^3 - 6x^2$ de $2x^3 + 0x^2$, obtuvimos $6x^2$ y entonces "bajamos" el término $-14x$. Este proceso continúa hasta que lleguemos a 7, el *residuo*. Siempre nos detendremos cuando el residuo sea 0 o un polinomio cuyo grado sea menor que el grado del divisor. Nuestra respuesta la podemos escribir como

$$2x^2 + 6x + 4 + \frac{7}{x - 3}.$$

Esto es, la respuesta tiene la forma

$$\text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}.$$

Una manera de comprobar una división es verificar que

$$(\text{cociente})(\text{divisor}) + \text{residuo} = \text{dividendo}.$$

Por medio de esta ecuación usted debe ser capaz de verificar el resultado de este ejemplo.

Ejercicio 0.6

Realice las operaciones indicadas y simplifique.

1. $(8x - 4y + 2) + (3x + 2y - 5)$.

2. $(6x^2 - 10xy + 2) + (2z - xy + 4)$.

3. $(8t^2 - 6s^2) + (4s^2 - 2t^2 + 6)$.

4. $(\sqrt{x} + 2\sqrt{x}) + (\sqrt{x} + 3\sqrt{x})$.

5. $(\sqrt{x} + \sqrt{2y}) + (\sqrt{x} + \sqrt{3z})$.

6. $(2x + 3y - 5) - (7x - 6y + 2)$.

7. $(6x^2 - 10xy + \sqrt{2}) - (2z - xy + 4)$.

8. $(\sqrt{x} + 2\sqrt{x}) - (\sqrt{x} + 3\sqrt{x})$.

9. $(\sqrt{x} + \sqrt{2y}) - (\sqrt{x} + \sqrt{3z})$.

10. $4(2z - w) - 3(w - 2z)$.

11. $3(3x + 3y - 7) - 3(8x - 2y + 2)$.

12. $(2s + t) - 3(s - 6) + 4(1 - t)$.

13. $3(x^2 + y^2) - x(y + 2x) + 2y(x + 3y)$.

14. $2 - [3 + 4(s - 3)]$.

15. $2\{3[3(x^2 + 2) - 2(x^2 - 5)]\}$.

16. $4\{3(t + 5) - t[1 - (t + 1)]\}$.

17. $-3\{4x(x + 2) - 2[x^2 - (3 - x)]\}$.

18. $-\{-2[2a + 3b - 1] + 4[a - 2b] - a[2(b - 3)]\}$.

19. $(x + 4)(x + 5)$.

20. $(u + 2)(u + 5)$.

21. $(w + 2)(w - 5)$.

22. $(z - 7)(z - 3)$.

23. $(2x + 3)(5x + 2)$.

24. $(y - 4)(2y + 3)$.

25. $(x + 3)^2$.

26. $(2x - 1)^2$.

27. $(x - 5)^2$.

28. $(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 5)$.

29. $(\sqrt{2y} + 3)^2$.

30. $(y - 4)(y + 4)$.

31. $(2s - 1)(2s + 1)$.

32. $(z^2 - 3w)(z^2 + 3w)$.

33. $(x^2 - 3)(x + 4)$.

34. $(x + 1)(x^2 + x + 3)$.

35. $(x^2 - 4)(3x^2 + 2x - 1)$.

36. $(2x - 1)(3x^3 + 7x^2 - 5)$.

37. $x\{3(x-1)(x-2)+2[x(x+7)]\}$.

38. $[(2z+1)(2z-1)](4z^2+1)$.

39. $(x+y+2)(3x+2y-4)$.

40. $(x^2+x+1)^2$.

41. $(x+5)^3$.

42. $(x-2)^3$.

43. $(2x-3)^3$.

44. $(x+2y)^3$.

45. $\dfrac{z^2-18z}{z}$.

46. $\dfrac{2x^3-7x+4}{x}$.

47. $\dfrac{6x^5+4x^3-1}{2x^2}$.

48. $\dfrac{(4x-3)-(8x+9)}{4x}$.

49. $(x^2+3x-1)\div(x+3)$.

50. $(x^2-5x+4)\div(x-4)$.

51. $(3x^3-2x^2+x-3)\div(x+2)$.

52. $(x^4+2x^2+1)\div(x-1)$.

53. $t^2\div(t-8)$.

54. $(4x^2+6x+1)\div(2x-1)$.

55. $(3x^2-4x+3)\div(3x+2)$.

56. $(z^3+z^2+z)\div(z^2-z+1)$.

OBJETIVO Establecer las reglas básicas para factorizar y aplicarlas para factorizar expresiones.

0.7 Factorización

Cuando multiplicamos entre sí dos o más expresiones, éstas reciben el nombre de *factores* del producto. Por lo que si $c = ab$, entonces a y b son factores del producto c. Al proceso por el cual una expresión se escribe como el producto de sus factores se le llama *factorización*.

A continuación se presentan las reglas para la factorización de expresiones, la mayoría de las cuales surgen de los productos especiales vistos en la sección 0.6. El lado derecho de cada identidad es la forma factorizada de la que aparece a la izquierda.

Reglas de factorización

1. $xy + xz = x(y+z)$ (factor común).
2. $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$.
3. $abx^2 + (ad+cb)x + cd = (ax+c)(bx+d)$.
4. $x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$ (trinomio cuadrado perfecto).
5. $x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$ (trinomio cuadrado perfecto).
6. $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$ (diferencia de dos cuadrados).
7. $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2)$ (suma de dos cubos).
8. $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$ (diferencia de dos cubos).

Cuando factorizamos un polinomio, por lo común, elegimos factores que sean polinomios. Por ejemplo, $x^2-4=(x+2)(x-2)$. No escribiremos $x-4$ como $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)$.

Siempre factorice completamente. Por ejemplo,

$$2x^2-8=2(x^2-4)=2(x+2)(x-2).$$

EJEMPLO 1 Factores comunes

a. *Factorice completamente* $3k^2x^2+9k^3x$.

Solución: ya que $3k^2x^2=(3k^2x)(x)$ y $9k^3x=(3k^2x)(3k)$, cada término de la expresión original contiene el factor común $3k^2x$. Así, por la regla 1,

$$3k^2x^2 + 9k^3x = 3k^2x(x + 3k).$$

Observe que aun cuando $3k^2x^2 + 9k^3x = 3(k^2x^2 + 3k^3x)$, no podemos decir que la expresión esté completamente factorizada, ya que $k^2x^2 + 3k^3x$ todavía puede factorizarse.

b. *Factorice completamente* $8a^5x^2y^3 - 6a^2b^3yz - 2a^4b^4xy^2z^2$.

Solución:

$$\begin{aligned} &8a^5x^2y^3 - 6a^2b^3yz - 2a^4b^4xy^2z^2 \\ &= 2a^2y(4a^3x^2y^2 - 3b^3z - a^2b^4xyz^2). \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Factorización de trinomios

a. *Factorice completamente* $3x^2 + 6x + 3$.

Solución: primero sacamos un factor común. Después factorizamos por completo la expresión resultante. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x + 3 &= 3(x^2 + 2x + 1) \\ &= 3(x + 1)^2 \qquad \text{(Regla 4).} \end{aligned}$$

b. *Factorice completamente* $x^2 - x - 6$.

Solución: si este trinomio se puede factorizar en la forma $(x + a)(x + b)$, que es el producto de dos binomios, entonces debemos determinar los valores de a y de b. Como $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$, entonces

$$x^2 + (-1)x + (-6) = x^2 + (a + b)x + ab.$$

Igualando los coeficientes correspondientes, queremos que

$$a + b = -1 \quad \text{y} \quad ab = -6.$$

Si $a = -3$ y $b = 2$ entonces ambas condiciones se cumplen y de aquí,

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2).$$

Como verificación es conveniente multiplicar el lado derecho para ver si coincide con el izquierdo.

c. *Factorice completamente* $x^2 - 7x + 12$.

Solución:

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4).$$

EJEMPLO 3 Factorización

A continuación tenemos una variedad de expresiones completamente factorizadas. Los números entre paréntesis hacen referencia a las reglas utilizadas.

a. $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ (4).

b. $9x^2 + 9x + 2 = (3x + 1)(3x + 2)$ (3).

c. $6y^3 + 3y^2 - 18y = 3y(2y^2 + y - 6)$ (1)

$\qquad = 3y(2y - 3)(y + 2)$ (3).

d. $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ (5).

e. $z^{1/4} + z^{5/4} = z^{1/4}(1 + z)$ (1).

f. $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$ (6)

$= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$ (6).

g. $x^{2/3} - 5x^{1/3} + 4 = (x^{1/3} - 1)(x^{1/3} - 4)$ (2).

h. $ax^2 - ay^2 + bx^2 - by^2 = (ax^2 - ay^2) + (bx^2 - by^2)$

$= a(x^2 - y^2) + b(x^2 - y^2)$ (1)

$= (x^2 - y^2)(a + b)$ (1)

$= (x + y)(x - y)(a + b)$ (6).

i. $8 - x^3 = (2)^3 - (x)^3 = (2 - x)(4 + 2x + x^2)$ (8).

j. $x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$ (6)

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ (7), (8).

Observe en el ejemplo 3f que $x^2 - 1$ es factorizable, pero $x^2 + 1$ no. En el ejemplo 3h, factorizamos haciendo uso de la agrupación.

Ejercicio 0.7

Factorice completamente las expresiones siguientes.

1. $6x + 4$.

2. $6y^2 - 4y$.

3. $10xy + 5xz$.

4. $3x^2y - 9x^3y^3$.

5. $8a^3bc - 12ab^3cd + 4b^4c^2d^2$.

6. $6z^2t^3 + 3zst^4 - 12z^2t^3$.

7. $z^2 - 49$.

8. $x^2 + 3x - 4$.

9. $p^2 + 4p + 3$.

10. $s^2 - 6s + 8$.

11. $16x^2 - 9$.

12. $x^2 + 2x - 24$.

13. $z^2 + 6z + 8$.

14. $4t^2 - 9s^2$.

15. $x^2 + 6x + 9$.

16. $y^2 - 15y + 50$.

17. $5x^2 + 25x + 30$.

18. $2x^2 + 7x - 15$.

19. $3x^2 - 3$.

20. $4y^2 - 8y + 3$.

21. $6y^2 + 13y + 2$.

22. $4x^2 - x - 3$.

23. $12s^3 + 10s^2 - 8s$.

24. $9z^2 + 30z + 25$.

25. $x^{2/3}y - 4x^{8/3}y^3$.

26. $9x^{4/7} - 1$.

27. $2x^3 + 2x^2 - 12x$.

28. $x^2y^2 - 4xy + 4$.

29. $(4x + 2)^2$.

30. $3s^2(3s - 9s^2)^2$.

31. $x^3y^2 - 4x^2y + 49x$.

32. $(3x^2 + x) + (6x + 2)$.

33. $(x^3 - 4x) + (8 - 2x^2)$.

34. $(x^2 - 1) + (x^2 - x - 2)$.

35. $(y^4 + 8y^3 + 16y^2) - (y^2 + 8y + 16)$.

36. $x^3y - 4xy + z^2x^2 - 4z^2$.

37. $x^3 + 8$.

38. $x^3 - 1$.

39. $x^6 - 1$.

40. $27 + 8x^3$.

41. $(x + 3)^3(x - 1) + (x + 3)^2(x - 1)^2$.

42. $(x + 5)^2(x + 1)^3 + (x + 5)^3(x + 1)^2$.

43. $P(1 + r) + P(1 + r)r$.

44. $(x - 3)(2x + 3) - (2x + 3)(x + 5)$.

45. $x^4 - 16$.

46. $81x^4 - y^4$.

47. $y^8 - 1$.

48. $t^4 - 4$.

49. $x^4 + x^2 - 2$.

50. $x^4 - 10x^2 + 9$.

51. $x^4y - 2x^2y + y$.

52. $4x^3 - 6x^2 - 4x$.

OBJETIVO Simplificar fracciones y sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones. Racionalizar el denominador de una fracción.

0.8 Fracciones

Simplificación de fracciones

Por medio del principio fundamental de las fracciones (sección 0.4), podemos ser capaces de simplificar fracciones. Ese principio nos permite multiplicar o dividir el numerador y denominador de una fracción entre la misma cantidad diferente de cero. La fracción resultante será equivalente a la original. Las fracciones que consideremos se supone que tienen denominadores distintos de cero.

EJEMPLO 1 Simplificación de fracciones

a. *Simplifique* $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12}$.

Solución: primero factorizamos completamente el numerador y el denominador:

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-4)}.$$

Dividiendo numerador y denominador entre el factor común $x - 3$, tenemos

$$\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-4)} = \frac{1(x+2)}{1(x-4)} = \frac{x+2}{x-4}.$$

En general, sólo escribimos

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12} = \frac{\overset{1}{\cancel{(x-3)}}\,(x+2)}{\underset{1}{\cancel{(x-3)}}(x-4)} = \frac{x+2}{x-4}$$

o

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-4)} = \frac{x+2}{x-4}.$$

El proceso de eliminar el factor común, $x - 3$, por lo regular se conoce como "cancelación".

b. *Simplifique* $\frac{2x^2 + 6x - 8}{8 - 4x - 4x^2}$.

Solución:

$$\frac{2x^2 + 6x - 8}{8 - 4x - 4x^2} = \frac{2(x^2 + 3x - 4)}{4(2 - x - x^2)} = \frac{2(x-1)(x+4)}{4(1-x)(2+x)}$$

$$= \frac{2(x-1)(x+4)}{2(2)[(-1)(x-1)](2+x)}$$

Observe como $1 - x$ se escribe como $(-1)(x-1)$ para permitir la cancelación.

$$= \frac{x+4}{-2(2+x)} = -\frac{x+4}{2(x+2)}.$$

Multiplicación y división de fracciones

La regla para multiplicar $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$ es

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

EJEMPLO 2 Multiplicación de fracciones

a. $$\frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x-5} = \frac{x(x+3)}{(x+2)(x-5)}.$$

b. $$\frac{x^2-4x+4}{x^2+2x-3} \cdot \frac{6x^2-6}{x^2+2x-8} = \frac{[(x-2)^2][6(x+1)(x-1)]}{[(x+3)(x-1)][(x+4)(x-2)]}$$
$$= \frac{6(x-2)(x+1)}{(x+3)(x+4)}.$$

Para dividir $\frac{a}{b}$ entre $\frac{c}{d}$, donde $c \neq 0$, tenemos

En resumen, invertimos el divisor y multiplicamos.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

EJEMPLO 3 División de fracciones

a. $$\frac{x}{x+2} \div \frac{x+3}{x-5} = \frac{x}{x+2} \cdot \frac{x-5}{x+3} = \frac{x(x-5)}{(x+2)(x+3)}.$$

b. $$\frac{\frac{x-5}{x-3}}{2x} = \frac{\frac{x-5}{x-3}}{\frac{2x}{1}} = \frac{x-5}{x-3} \cdot \frac{1}{2x} = \frac{x-5}{2x(x-3)}.$$

c. $$\frac{\frac{4x}{x^2-1}}{\frac{2x^2+8x}{x-1}} = \frac{4x}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{2x^2+8x} = \frac{4x(x-1)}{[(x+1)(x-1)][2x(x+4)]}$$
$$= \frac{2}{(x+1)(x+4)}.$$

Racionalización del denominador

Algunas veces el denominador de una fracción tiene dos términos e incluye raíces cuadradas, como $2 - \sqrt{3}$ o $\sqrt{5} + \sqrt{2}$. Entonces, el denominador puede racionalizarse al multiplicarlo por una expresión que lo convierta en una diferencia de dos cuadrados. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} &= \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \\ &= \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2} \\ &= \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}.\end{aligned}$$

La racionalización del *numerador* es un procedimiento sencillo.

EJEMPLO 4 Racionalización de denominadores

a. $$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{2}-6} &= \frac{x}{\sqrt{2}-6} \cdot \frac{\sqrt{2}+6}{\sqrt{2}+6} = \frac{x(\sqrt{2}+6)}{(\sqrt{2})^2-6^2} \\ &= \frac{x(\sqrt{2}+6)}{2-36} = -\frac{x(\sqrt{2}+6)}{34}.\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \\ &= \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}{5-2} = \frac{5-2\sqrt{5}\sqrt{2}+2}{3} = \frac{7-2\sqrt{10}}{3}.\end{aligned}$$

Suma y resta de fracciones

En el ejemplo 3b de la sección 0.3, se mostró que $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$. Esto es, si sumamos dos fracciones que tienen un denominador común, entonces el resultado será una fracción cuyo denominador es el denominador común. El numerador será la suma de los numeradores de las fracciones originales. De modo semejante, $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$.

EJEMPLO 5 Suma y resta de fracciones

a. $$\begin{aligned}\frac{p^2-5}{p-2}+\frac{3p+2}{p-2} &= \frac{(p^2-5)+(3p+2)}{p-2} \\ &= \frac{p^2+3p-3}{p-2}.\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}\frac{x^2-5x+4}{x^2+2x-3}-\frac{x^2+2x}{x^2+5x+6} &= \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+3)}-\frac{x(x+2)}{(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{x-4}{x+3}-\frac{x}{x+3} = \frac{(x-4)-x}{x+3} = -\frac{4}{x+3}.\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}&\frac{x^2+x-5}{x-7}-\frac{x^2-2}{x-7}+\frac{-4x+8}{x^2-9x+14} \\ &\quad= \frac{x^2+x-5}{x-7}-\frac{x^2-2}{x-7}+\frac{-4\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-7)}\end{aligned}$$

$$= \frac{(x^2 + x - 5) - (x^2 - 2) + (-4)}{x - 7}$$

$$= \frac{x - 7}{x - 7} = 1.$$

Para sumar (o restar) dos fracciones con denominadores diferentes, utilice el principio fundamental de las fracciones para reescribirlas como fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. Después proceda con la suma (o resta) por el método descrito anteriormente.

Por ejemplo, para encontrar

$$\frac{2}{x^3(x-3)} + \frac{3}{x(x-3)^2},$$

podemos convertir la primera fracción en una fracción equivalente, multiplicando el numerador y el denominador por $x - 3$:

$$\frac{2(x-3)}{x^3(x-3)^2};$$

y convertir la segunda fracción multiplicando el numerador y el denominador por x^2:

$$\frac{3x^2}{x^3(x-3)^2}.$$

Estas fracciones tienen el mismo denominador. De aquí que,

$$\frac{2}{x^3(x-3)} + \frac{3}{x(x-3)^2} = \frac{2(x-3)}{x^3(x-3)^2} + \frac{3x^2}{x^3(x-3)^2}$$

$$= \frac{3x^2 + 2x - 6}{x^3(x-3)^2}.$$

Podríamos haber convertido las fracciones originales en fracciones equivalentes con *cualquier* denominador común. Sin embargo, preferimos convertirlas en fracciones con el denominador $x^3(x-3)^2$. Éste es el **mínimo común denominador (MCD)** de las fracciones $2/[x^3(x-3)]$ y $3/[x(x-3)^2]$.

En general, para encontrar el MCD de dos o más fracciones, primero se factoriza completamente cada denominador. *El MCD es el producto de cada uno de los distintos factores que aparecen en los denominadores*, *cada uno elevado a la potencia más grande a la que se presenta en alguno de los denominadores*.

EJEMPLO 6 Suma y resta de fracciones

a. *Reste:* $\dfrac{t}{3t+2} - \dfrac{4}{t-1}$.

Solución: el MCD es $(3t + 2)(t - 1)$. Por lo que tenemos

$$\frac{t}{(3t+2)} - \frac{4}{t-1} = \frac{t(t-1)}{(3t+2)(t-1)} - \frac{4(3t+2)}{(3t+2)(t-1)}$$

$$= \frac{t(t-1) - 4(3t+2)}{(3t+2)(t-1)}$$

$$= \frac{t^2 - t - 12t - 8}{(3t+2)(t-1)} = \frac{t^2 - 13t - 8}{(3t+2)(t-1)}.$$

b. *Sume:* $\dfrac{4}{q-1} + 3.$

Solución: el MCD es $q - 1$.

$$\frac{4}{q-1} + 3 = \frac{4}{q-1} + \frac{3(q-1)}{q-1}$$
$$= \frac{4 + 3(q-1)}{q-1} = \frac{3q+1}{q-1}.$$

EJEMPLO 7 Resta de fracciones

$$\frac{x-2}{x^2+6x+9} - \frac{x+2}{2(x^2-9)}$$
$$= \frac{x-2}{(x+3)^2} - \frac{x+2}{2(x+3)(x-3)} \quad [\text{MCD} = 2(x+3)^2(x-3)]$$
$$= \frac{(x-2)(2)(x-3)}{(x+3)^2(2)(x-3)} - \frac{(x+2)(x+3)}{2(x+3)(x-3)(x+3)}$$
$$= \frac{(x-2)(2)(x-3) - (x+2)(x+3)}{2(x+3)^2(x-3)}$$
$$= \frac{2(x^2-5x+6) - (x^2+5x+6)}{2(x+3)^2(x-3)}$$
$$= \frac{2x^2 - 10x + 12 - x^2 - 5x - 6}{2(x+3)^2(x-3)}$$
$$= \frac{x^2 - 15x + 6}{2(x+3)^2(x-3)}.$$

El ejemplo 8 muestra dos métodos para simplificar una fracción “compleja”.

EJEMPLO 8 Operaciones combinadas con fracciones

Simplifique $\dfrac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h}.$

Solución: primero combinamos las fracciones en el numerador y obtenemos

$$\frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \frac{\dfrac{x}{x(x+h)} - \dfrac{x+h}{x(x+h)}}{h} = \frac{\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{\frac{h}{1}} = \frac{-h}{x(x+h)h} = -\frac{1}{x(x+h)}.$$

La fracción original también puede simplificarse multiplicando el numerador y el denominador por el MCD de las fracciones implicadas en el numerador (y denominador), a saber, $x(x+h)$:

$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\left[\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right]x(x+h)}{h[x(x+h)]}$$

$$= \frac{x-(x+h)}{x(x+h)h} = \frac{-h}{x(x+h)h} = -\frac{1}{x(x+h)}.$$

Ejercicio 0.8

En los problemas del 1 al 6, simplifique.

1. $\frac{x^2-4}{x^2-2x}$. **2.** $\frac{x^2-5x-6}{x^2-2x-3}$. **3.** $\frac{x^2-9x+20}{x^2+x-20}$.

4. $\frac{3x^2-27x+24}{2x^3-16x^2+14x}$. **5.** $\frac{6x^2+x-2}{2x^2+3x-2}$. **6.** $\frac{12x^2-19x+4}{6x^2-17x+12}$.

En los problemas del 7 al 48 realice las operaciones y simplifique tanto como sea posible.

7. $\frac{y^2}{y-3} \cdot \frac{-1}{y+2}$. **8.** $\frac{z^2-4}{z^2+2z} \cdot \frac{z^2}{z^2-4z+4}$. **9.** $\frac{2x-3}{x-2} \cdot \frac{2-x}{2x+3}$.

10. $\frac{x^2-y^2}{x+y} \cdot \frac{x^2+2xy+y^2}{y-x}$. **11.** $\frac{2x-2}{x^2-2x-8} \div \frac{x^2-1}{x^2+5x+4}$. **12.** $\frac{x^2+2x}{3x^2-18x+24} \div \frac{x^2-x-6}{x^2-4x+4}$.

13. $\frac{\frac{x^2}{6}}{\frac{x}{3}}$. **14.** $\frac{\frac{4x^3}{9x}}{\frac{x}{18}}$. **15.** $\frac{\frac{2m}{n^2}}{\frac{6m}{n^3}}$. **16.** $\frac{\frac{c+d}{c}}{\frac{c-d}{2c}}$.

17. $\frac{\frac{4x}{3}}{2x}$. **18.** $\frac{4x}{\frac{3}{2x}}$. **19.** $\frac{-9x^3}{\frac{x}{3}}$. **20.** $\frac{\frac{-9x^3}{x}}{3}$.

21. $\frac{\frac{x-5}{x^2-7x+10}}{x-2}$. **22.** $\frac{\frac{x^2+6x+9}{x}}{x+3}$. **23.** $\frac{\frac{10x^3}{x^2-1}}{\frac{5x}{x+1}}$. **24.** $\frac{\frac{x^2-x-6}{x^2-9}}{\frac{x^2-4}{x^2+2x-3}}$.

25. $\frac{\frac{x^2+7x+10}{x^2-2x-8}}{\frac{x^2+6x+5}{x^2-3x-4}}$. **26.** $\frac{\frac{(x+2)^2}{3x-2}}{\frac{9x+18}{4-9x^2}}$. **27.** $\frac{\frac{4x^2-9}{x^2+3x-4}}{\frac{2x-3}{1-x^2}}$. **28.** $\frac{\frac{6x^2y+7xy-3y}{xy-x+5y-5}}{\frac{x^3y+4x^2y}{xy-x+4y-4}}$.

29. $\dfrac{x^2}{x+3} + \dfrac{5x+6}{x+3}$.

30. $\dfrac{2}{x+2} + \dfrac{x}{x+2}$.

31. $\dfrac{2}{t} + \dfrac{1}{3t}$.

32. $\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x}$.

33. $1 - \dfrac{p^2}{p^2-1}$.

34. $\dfrac{4}{s+4} + s$.

35. $\dfrac{4}{2x-1} + \dfrac{x}{x+3}$.

36. $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1}$.

37. $\dfrac{1}{x^2-x-2} + \dfrac{1}{x^2-1}$.

38. $\dfrac{2}{3y^2-5y-2} - \dfrac{y}{3y^2-7y+2}$.

39. $\dfrac{4}{x-1} - 3 + \dfrac{-3x^2}{5-4x-x^2}$.

40. $\dfrac{2x-3}{2x^2+11x-6} - \dfrac{3x+1}{3x^2+16x-12} + \dfrac{1}{3x-2}$.

41. $(1+x^{-1})^2$.

42. $(x^{-1}+y^{-1})^2$.

43. $(x^{-1}-y)^{-1}$.

44. $(x-y^{-1})^2$.

45. $\dfrac{4+\dfrac{1}{x}}{3}$.

46. $\dfrac{\dfrac{x+3}{x}}{x-\dfrac{9}{x}}$.

47. $\dfrac{3-\dfrac{1}{2x}}{x+\dfrac{x}{x+2}}$.

48. $\dfrac{\dfrac{x-1}{x^2+5x+6}-\dfrac{1}{x+2}}{3+\dfrac{x-7}{3}}$.

En los problemas 49 y 50 realice las operaciones indicadas, pero no racionalice los denominadores.

49. $\dfrac{2}{\sqrt{x+h}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

50. $\dfrac{v\sqrt{v}}{\sqrt{2+v}} + \dfrac{1}{\sqrt{v}}$.

En los problemas del 51 al 60 simplifique y exprese su respuesta de manera que no aparezcan radicales en el denominador.

51. $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$.

52. $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$.

53. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}$.

54. $\dfrac{5}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$.

55. $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

56. $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

57. $\dfrac{1}{x+\sqrt{5}}$.

58. $\dfrac{x-3}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{4}{\sqrt{x}-1}$.

59. $\dfrac{5}{2+\sqrt{3}} - \dfrac{4}{1-\sqrt{2}}$.

60. $\dfrac{4}{\sqrt{x}+2} \cdot \dfrac{x^2}{3}$.

Aplicación práctica

Modelado del comportamiento de una celda de carga[3]

¿Qué tienen en común una báscula y un maniquí para pruebas de choque? Ambos tienen celdas de carga. Una celda de carga es un dispositivo que mide fuerza, y la transforma en señales eléctricas. En una báscula, una o más celdas miden el peso que yace sobre la báscula. En un maniquí de prueba de choque, las celdas de carga distribuidas en el cuerpo del maniquí miden las fuerzas de impacto cuando el maniquí choca con el interior del automóvil.

Ya que las celdas de carga son dispositivos de medición, tienen que contar con los atributos de predecibilidad y consistencia. Un requerimiento común es que la salida de voltaje, V, esté relacionada con la fuerza de entrada, F, mediante una ecuación lineal:

$$V = aF + b.$$

Las ecuaciones lineales se estudiarán en el capítulo 1. Una respuesta lineal permite una transformación sencilla de voltaje a lectura métrica.

El equipo utilizado para levantar pesos con frecuencia contiene celdas de carga que proporcionan avisos de cuándo el equipo alcanza su nivel límite. Suponga que una compañía que fabrica celdas de carga para utilizarlas en grúas, coloca una celda de prueba y obtiene los datos siguientes (con la fuerza medida en miles de libras y el voltaje medido en volts).

Fuerza	Voltaje	Fuerza	Voltaje
150.000	0.11019	1650.000	1.20001
300.000	0.21956	1800.000	1.30822
450.000	0.32949	1950.000	1.41599
600.000	0.43899	2100.000	1.52399
750.000	0.54803	2250.000	1.63194
900.000	0.65694	2400.000	1.73947
1050.000	0.76562	2550.000	1.84646
1200.000	0.87487	2700.000	1.95392
1350.000	0.98292	2850.000	2.06128
1500.000	1.09146	3000.000	2.16844

Si la celda de carga se comporta adecuadamente, una ecuación lineal sería un buen *modelo* de los datos. En otras palabras, cuando los valores de los datos se grafican como puntos en una gráfica y se sobrepone una recta, los puntos y la recta deben coincidir.

Las matemáticas para determinar la recta que mejor modela los datos son muy tediosas. Por fortuna, una calculadora gráfica puede hacerlo de manera automática. El resultado es

$$V = 0.0007221F + 0.006081368.$$

Al graficar tanto los datos como la ecuación, se obtiene el resultado que se muestra en la figura 0.2.

Parece como si en verdad el modelo lineal fuese un muy buen ajuste. Pero, ¿es lo suficientemente bueno? Veamos las diferencias entre los voltajes medidos y los valores respectivos que pronostica el modelo lineal. Para cada magnitud de la fuerza, restamos el voltaje calculado con la ecuación, del voltaje medido para esa magnitud de la fuerza. Las diferencias que calculamos se denominan los residuales.

Una vez que hemos calculado los residuales, podemos graficarlos como lo hicimos con los datos originales (véase la fig. 0.3).

Tal parece que los datos que están en la mitad de la figura 0.2, están ligeramente por arriba de la recta (residuales positivos), mientras que los que se encuentran en los extremos de la recta están ligeramente debajo de ella (residuales negativos). En otras palabras, el patrón de los datos tiene una ligera curvatura,

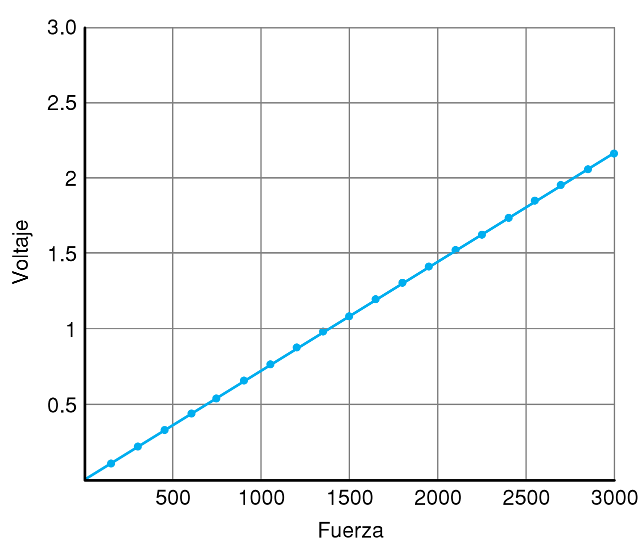


FIGURA 0.2 El modelo lineal.

[3]Con base en la sección 4.6.1 de *Engineering Statistics Handbook*, National Institute of Standards and Technology/SEMATECH, `www.nist.gov/itl/div898/handbook/pmd/section6/pmd61.htm`.

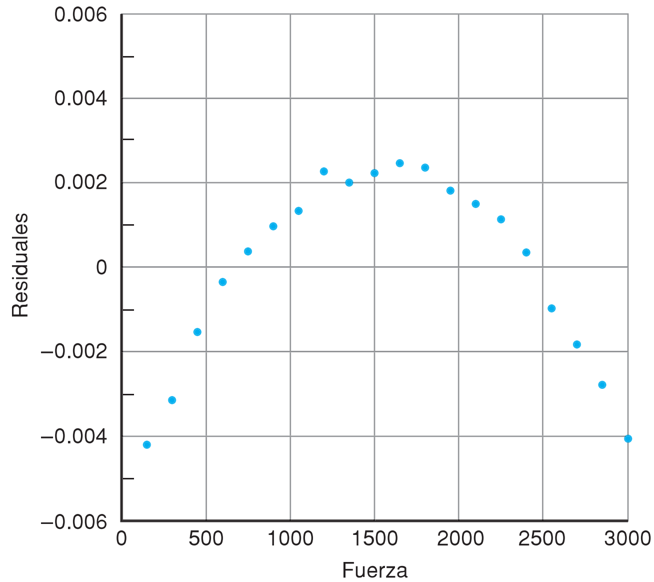


FIGURA 0.3 Gráfica de los residuales.

la cual se hace evidente sólo cuando graficamos los residuales y hacemos un "acercamiento" en la escala vertical.

La gráfica de los residuales parece una parábola (véase el cap. 4). Puesto que la ecuación de una parábola tiene un término cuadrático, podemos esperar que una ecuación cuadrática sea un mejor modelo que prediga los datos que uno lineal. Con base en la función de regresión cuadrática de una calculadora gráfica, se obtiene la ecuación

$$V = (-3.22693 \times 10^{-9})F^2 + 0.000732265F + 0.000490711.$$

El coeficiente pequeño en el término de F al cuadrado indica una no linealidad ligera en los datos.

Para el fabricante de celdas de carga, la no linealidad ligera lo alertará para tomar una decisión. Por un lado, una respuesta no lineal de la celda de carga podría producir mediciones imprecisas en algunas aplicaciones, en especial si la celda se está utilizando para medir fuerzas fuera del rango de los datos de prueba (las grúas montadas en barcos de carga algunas veces llevan cargas de hasta 5000 toneladas, o 10 millones de libras). Por otra parte, todos los procesos de manufactura implican un compromiso entre lo que es ideal y lo que es factible prácticamente.

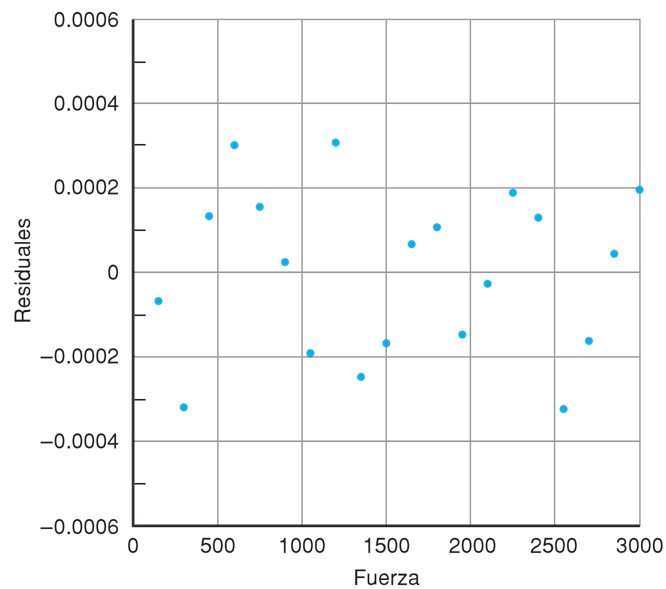
Ejercicios

1. Introduzca los valores de fuerza y voltaje como dos listas separadas en una calculadora gráfica, y luego utilice la función de regresión lineal del menú de estadística para generar una ecuación de regresión. Compare su resultado con la ecuación lineal dada en el estudio precedente.

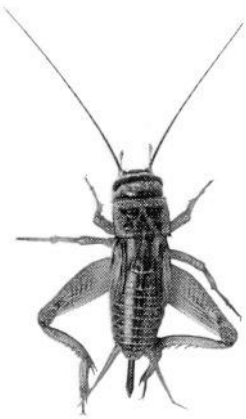
2. En la mayoría de las calculadoras gráficas, si usted multiplica la lista de fuerzas por 0.0007221, suma 0.006081368 y luego resta el resultado de la lista de voltajes, tendrá la lista de residuales. ¿Por qué se obtiene esto? Almacene los residuales como una nueva lista; luego grafíquelos y compare sus resultados con la figura 0.3.

3. Utilice la función de regresión cuadrática de la calculadora gráfica para generar una nueva ecuación de regresión. Compare su resultado con la ecuación del estudio precedente.

4. El modelo cuadrático también tiene residuales, que cuando se grafican se ven como esto:



Compare la escala del eje vertical con la respectiva de la figura 0.3. ¿Qué le sugiere esta comparación? ¿Qué sugiere el patrón de los datos para los residuales cuadráticos?



CAPÍTULO 1

Ecuaciones

Cuando se trabaja con un problema de aplicación de la vida real, con frecuencia nos encontramos con una o más ecuaciones que modelan dicha situación. Muchos fenómenos pueden describirse utilizando ecuaciones lineales, que son el tipo más simple para trabajar.

Un ejemplo es el chirrido del grillo del árbol de nieve (*Oecanthulus niveus*), que se encuentra en el medio oeste de Estados Unidos. A finales de 1890, los naturalistas establecieron que cuando este grillo chirría (lo cual hace sólo al final del verano), la velocidad del chirrido de N chirridos por minuto está relacionada con la temperatura del aire T en grados Fahrenheit por medio de la ecuación.

$$N = 4.7T - 190.$$ [1]

Cuando T aumenta, también lo hace N, lo cual significa que el grillo chirría más rápido en clima cálido. Para predecir la velocidad de chirrido a partir de la temperatura, simplemente multiplicamos la temperatura por 4.7 y restamos 190. Por ejemplo, cuando la temperatura es de 60 grados, el grillo chirría a una velocidad de $4.7(60) - 190 = 92$ chirridos por minuto.

¿Podemos utilizar los chirridos del grillo como un termómetro para indicar la temperatura? Sí. Primero debemos despejar a T de la ecuación, utilizando las técnicas que se explicarán en este capítulo. El resultado es:

$$T = \frac{N + 190}{4.7}.$$

Esto significa que si en una tarde de agosto en Nebraska, sentados en el exterior oímos un grillo que emite 139 chirridos por minuto, entonces sabemos que la temperatura es alrededor de $(139 + 190)/4.7 = 70$ grados.

En este capítulo, desarrollaremos técnicas para resolver no sólo las ecuaciones lineales, sino también las cuadráticas.

[1] C. A. Bessey y E. A. Bessey, "Further Notes on Thermometer Crickets". *American Naturalist,* 32 (1898), 263-264.

OBJETIVO Estudiar las ecuaciones equivalentes y desarrollar técnicas para resolver ecuaciones lineales, que incluyan las ecuaciones con literales.

1.1 Ecuaciones lineales

Ecuaciones

Una **ecuación** es una proposición que indica que dos expresiones son iguales. Las dos expresiones que conforman una ecuación son llamadas sus **lados** o **miembros**, y están separadas por el **signo de igualdad** "=".

Principios en práctica 1
Ejemplos de ecuaciones

Usted está empacando material de cercado para un jardín rectangular en el que el largo es 2 pies mayor que el ancho. Escriba una ecuación que represente los pies lineales P necesarios para un jardín con ancho w.

EJEMPLO 1 Ejemplos de ecuaciones

a. $x + 2 = 3.$ **b.** $x^2 + 3x + 2 = 0.$

c. $\dfrac{y}{y - 4} = 6.$ **d.** $w = 7 - z.$

En el ejemplo 1 cada ecuación contiene al menos una variable. Una **variable** es un símbolo que puede ser reemplazado por un número cualquiera de un conjunto de números diferentes. Los símbolos más comunes para las variables son las últimas letras del alfabeto, x, y, z, w y t. De aquí que se diga de (a) y (c) que son ecuaciones en las variables x y y, respectivamente. La ecuación (d) es una ecuación en las variables w y z. En la ecuación $x + 2 = 3$, los números 2 y 3 se conocen como *constantes*, ya que son números fijos.

Aquí estudiamos las restricciones sobre las variables.

Nunca permitamos que en una ecuación haya una variable que tenga un valor para el cual esa ecuación no esté definida. Por tanto, en

$$\frac{y}{y - 4} = 6,$$

y no puede ser 4, porque provocaría que el denominador fuese cero (no podemos dividir entre cero). En algunas ecuaciones los valores permisibles de una variable están restringidos por razones físicas. Por ejemplo, si la variable t representa el tiempo, los valores negativos de t pueden no tener sentido. Entonces debemos suponer que $t \geq 0$.

Resolver una ecuación significa encontrar todos los valores de sus variables para los cuales la ecuación es verdadera. Estos valores se conocen como *soluciones* de la ecuación y se dice que *satisfacen* la ecuación. Cuando sólo está implicada una variable, una solución también se conoce como **raíz.** Al conjunto de todas las soluciones se le llama **conjunto solución** de la ecuación. En ocasiones, a una letra que representa una cantidad desconocida en una ecuación se le denomina *incógnita* (o *indeterminada*). Ahora ilustraremos estos términos.

EJEMPLO 2 Terminología para las ecuaciones

a. En la ecuación $x + 2 = 3$, la variable x es la incógnita. Obviamente el único valor de x que satisface la ecuación es 1. De aquí que 1 sea una raíz y el conjunto solución sea $\{1\}$.

b. -2 es una raíz de $x^2 + 3x + 2 = 0$ porque sustituir -2 por x hace que la ecuación sea verdadera: $(-2)^2 + 3(-2) + 2 = 0$.

c. $w = 7 - z$ es una ecuación con dos incógnitas. Una solución es la pareja de valores $w = 4$ y $z = 3$. Sin embargo, existe una infinidad de soluciones. ¿Podría pensar en otra?

Ecuaciones equivalentes

Resolver una ecuación puede implicar la realización de operaciones en ella. Es preferible que al aplicar cualquiera de tales operaciones se obtenga otra ecuación con exactamente las mismas soluciones que la ecuación original. Cuando esto ocurre, se dice que las ecuaciones son **equivalentes.** Existen tres operaciones que garantizan la equivalencia:

1. Sumar (o restar) el mismo polinomio[2] a (de) ambos miembros de una ecuación, en donde el polinomio está en la misma variable que aparece en la ecuación.

Por ejemplo, si $-5x = 5 - 6x$, entonces sumar $6x$ a ambos miembros nos da la ecuación equivalente $-5x + 6x = 5 - 6x + 6x$, o $x = 5$.

La equivalencia no se garantiza si ambos lados se multiplican o dividen por una expresión que incluya una variable.

2. Multiplicar (dividir) ambos miembros de una ecuación por la misma constante, excepto el cero.

Por ejemplo, si $10x = 5$, entonces dividir ambos miembros entre 10 nos da la ecuación equivalente $\frac{10x}{10} = \frac{5}{10}$, o $x = \frac{1}{2}$.

3. Reemplazar cualquiera de los miembros de una ecuación por una expresión igual (equivalente).

Por ejemplo, si $x(x + 2) = 3$, entonces reemplazar el miembro izquierdo por la expresión equivalente $x^2 + 2x$, da la ecuación equivalente $x^2 + 2x = 3$.

Repetimos: la aplicación de las operaciones, de la 1 a la 3, garantiza que la ecuación resultante sea equivalente a la original. Sin embargo, algunas veces, para resolver una ecuación, tenemos que aplicar otras operaciones, distintas de la 1 a la 3. Estas operaciones *no* necesariamente resultan en ecuaciones equivalentes. Se incluyen las siguientes.

Operaciones que pueden no producir ecuaciones equivalentes

4. Multiplicar ambos miembros de una ecuación por una expresión que involucre la variable.

5. Dividir ambos miembros de una ecuación por una expresión que involucre la variable.

6. Elevar ambos miembros de una ecuación al mismo exponente.

La operación 6 incluye tomar raíces en ambos miembros.

Ilustraremos las últimas tres operaciones. Por ejemplo, por inspección la única raíz de $x - 1 = 0$ es 1. Multiplicar cada miembro por x (operación 4) nos da $x^2 - x = 0$, ecuación que se satisface si x es 0 o 1 (verifique esto por sustitución). Pero 0 *no* satisface la ecuación *original*. Por tanto, las ecuaciones no son equivalentes.

Asimismo, puede verificar que la ecuación $(x - 4)(x - 3) = 0$ se satisface cuando x es 4 o 3. Dividir ambos miembros entre $x - 4$ (operación 5) nos da $x - 3 = 0$, cuya única raíz es 3. Otra vez no tenemos una equivalencia, ya que, en este caso, se ha "perdido" una raíz. Observe que cuando x es 4, la división entre $x - 4$ implica dividir entre 0, una operación que no es válida.

---

[2]Véase la sección 0.6 para una definición de polinomio.

Por último, elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación $x = 2$ (operación 6) da $x^2 = 4$, la cual es verdadera si $x = 2$ o -2. Pero -2 no es raíz de la ecuación original.

De este estudio, queda claro que cuando realicemos las operaciones 4 al 6, debemos ser cuidadosos acerca de las conclusiones concernientes a las raíces de una ecuación dada. Las operaciones 4 y 6, *pueden* producir una ecuación con más raíces. Por tanto, se debe verificar si la “solución” obtenida por estas operaciones satisface o no la ecuación *original*. La operación 5 *puede* producir una ecuación con menos raíces. En este caso, cualquier raíz “perdida” tal vez nunca pueda determinarse. Por ello, si es posible, evite efectuar la operación 5.

En resumen, una ecuación puede pensarse como un conjunto de restricciones sobre cualquier variable de la ecuación. Las operaciones 4, 5 y 6 pueden aumentar o disminuir las restricciones, lo que da lugar a soluciones diferentes de la ecuación original. Sin embargo, las operaciones 1, 2 y 3 nunca afectan las restricciones.

Tecnología

Una calculadora gráfica puede utilizarse para comprobar una raíz. Por ejemplo, suponga que queremos determinar si 3/2 es una raíz de la ecuación

$$2x^3 + 7x^2 = 19x + 60.$$

Primero, reescribimos la ecuación de modo que un miembro sea 0. Restar $19x + 60$ de ambos miembros nos da la ecuación equivalente

$$2x^3 + 7x^2 - 19x - 60 = 0.$$

En una calculadora gráfica TI-83 ingresamos la expresión $2x^3 + 7x^2 - 19x - 60$ como Y_1 y después evaluamos Y_1 en $x = 3/2$. La figura 1.1 muestra que el resultado es –66, el cual es diferente de cero. Por tanto, 3/2 no es una raíz. Sin embargo, si Y_1 es evaluada en $x = -5/2$ esto nos *da* 0. De modo que $-5/2$ es una raíz de la ecuación original.

Conviene destacar que si la ecuación original hubiera estado en términos de la variable t,

$$2t^3 + 7t^2 = 19t + 60,$$

entonces debemos reemplazar t por x, ya que la calculadora evalúa Y_1 en un valor específico de x, no de t.

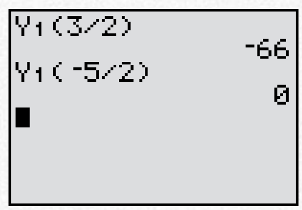


FIGURA 1.1 Para $2x^3 + 7x^2 - 19x - 60 = 0$, $^3/_2$ no es raíz, pero $^{-5}/_2$ sí lo es.

Ecuaciones lineales

Los principios presentados hasta aquí se demostrarán ahora en la solución de una *ecuación lineal*.

Definición

Una ***ecuación lineal*** en la variable x es una ecuación que puede escribirse en la forma

$$ax + b = 0, \tag{1}$$

donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

Una ecuación lineal también se conoce como ecuación de primer grado o ecuación de grado uno, ya que la potencia más alta de la variable que aparece en la ecuación (1) es la primera.

Para resolver una ecuación lineal realizamos operaciones en ella hasta obtener una ecuación equivalente cuyas soluciones son *obvias*. Esto significa una ecuación en la que la variable queda aislada en un lado de la ecuación, como lo muestran los ejemplos siguientes.

Principios en práctica 2

Resolución de una ecuación lineal

El ingreso total de una cafetería con base en la venta de x cafés especiales está dado por $r = 2.25x$, y sus costos totales diarios están dados por $c = 0.75x + 300$. ¿Cuántos cafés especiales se necesitan vender cada día para obtener el punto de equilibrio? En otras palabras, ¿cuándo el ingreso es igual a los costos?

EJEMPLO 3 Resolución de una ecuación lineal

Resolver $5x - 6 = 3x$.

Solución: empezamos por dejar los términos que incluyen a x en un lado y las constantes en el otro. Entonces despejamos x por medio de las operaciones matemáticas adecuadas. Tenemos

$$
\begin{aligned}
5x - 6 &= 3x, \\
5x - 6 + (-3x) &= 3x + (-3x) && \text{(sumando } -3x \text{ a ambos miembros),} \\
2x - 6 &= 0 && \text{(simplificando, esto es, operación 3),} \\
2x - 6 + 6 &= 0 + 6 && \text{(sumando 6 a ambos miembros),} \\
2x &= 6 && \text{(simplificando),} \\
\frac{2x}{2} &= \frac{6}{2} && \text{(dividiendo ambos miembros entre 2),} \\
x &= 3.
\end{aligned}
$$

Es claro que 3 es la única raíz de la última ecuación. Como cada ecuación es equivalente a la anterior, concluimos que 3 debe ser la única raíz de $5x - 6 = 3x$. Esto es, el conjunto solución es $\{3\}$. Podemos describir el primer paso en la solución de una ecuación como el mover un término de un lado a otro cambiando su signo; esto por lo regular se conoce como *transponer*. Observe que como la ecuación original puede escribirse en la forma $2x + (-6) = 0$, resulta ser una ecuación lineal.

Principios en práctica 3

Resolución de una ecuación lineal

Mónica y Pedro han convenido en juntar sus ahorros cuando hayan ahorrado la misma cantidad de dinero. Mónica puede ahorrar \$40 semanales, pero ella primero debe usar \$125 para pagar la deuda de su tarjeta de crédito. Pedro ha ahorrado \$35 semanales durante tres semanas. ¿Dentro de cuánto tiempo juntarán sus ahorros? ¿Cuánto habrá ahorrado cada uno de ellos?

EJEMPLO 4 Resolución de una ecuación lineal

Resolver $2(p + 4) = 7p + 2$.

Solución: primero quitamos los paréntesis. Después agrupamos los términos semejantes y resolvemos. Tenemos

$$
\begin{aligned}
2(p + 4) &= 7p + 2 \\
2p + 8 &= 7p + 2 && \text{(propiedad distributiva),} \\
2p &= 7p - 6 && \text{(restando 8 de ambos lados),} \\
-5p &= -6 && \text{(restando 7p de ambos lados),} \\
p &= \frac{-6}{-5} && \text{(dividiendo ambos lados entre } -5\text{),} \\
p &= \frac{6}{5}.
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 5 Resolución de una ecuación lineal

Resolver $\dfrac{7x + 3}{2} - \dfrac{9x - 8}{4} = 6.$

Solución: primero eliminamos fracciones multiplicando *ambos* lados de la ecuación por el mínimo común denominador (MCD),[3] que es 4. Después efectuamos varias operaciones algebraicas para obtener una solución. Así,

La propiedad distributiva requiere de que *ambos* términos en el paréntesis sean multiplicados por 4.

$$
\begin{aligned}
4\left(\frac{7x+3}{2} - \frac{9x-8}{4}\right) &= 4(6), \\
4 \cdot \frac{7x+3}{2} - 4 \cdot \frac{9x-8}{4} &= 24 && \text{(propiedad distributiva),} \\
2(7x+3) - (9x-8) &= 24 && \text{(simplificando),} \\
14x + 6 - 9x + 8 &= 24 && \text{(propiedad distributiva),} \\
5x + 14 &= 24 && \text{(simplificando),} \\
5x &= 10 && \text{(restando 14 de ambos lados),} \\
x &= 2 && \text{(dividiendo ambos lados entre 5).}
\end{aligned}
$$

Toda ecuación lineal tiene exactamente una raíz.

Cada ecuación de los ejemplos 3 al 5 tiene una sola raíz. Esto es cierto para toda ecuación lineal en una variable.

Ecuaciones con literales

Las ecuaciones en las que algunas de las constantes no están especificadas pero están representadas por letras, tales como *a, b, c* o *d*, se llaman **ecuaciones con literales** y las letras se conocen como **constantes literales** o **constantes arbitrarias.** Por ejemplo, en la ecuación con literales $x + a = 4b$, podemos considerar a a y b como constantes arbitrarias. Las fórmulas como $I = Prt$, que expresan una relación entre ciertas cantidades, pueden considerarse como ecuaciones con literales. Si queremos expresar una letra en particular en términos de las otras, esta letra es considerada la incógnita.

Principios en práctica 4
Resolución de una ecuación con literales

La fórmula $d = rt$ proporciona la distancia d que un objeto recorre viajando a una velocidad r durante un tiempo t. ¿Cuál es la velocidad r de un tren que viaja d millas en t horas?

EJEMPLO 6 Resolución de ecuaciones con literales

a. *La ecuación $I = Prt$ es la fórmula para el interés simple I sobre un capital de P dólares a una tasa de interés anual r en un periodo de t años. Expresar r en términos de I, P y t.*

Solución: aquí consideramos que r será la incógnita. Para aislar a r dividimos ambos lados entre Pt. Tenemos

$$
\begin{aligned}
I &= Prt, \\
\frac{I}{Pt} &= \frac{Prt}{Pt}, \\
\frac{I}{Pt} &= r \quad \text{o} \quad r = \frac{I}{Pt}.
\end{aligned}
$$

[3]El mínimo común denominador de dos o más fracciones es el número más pequeño con todos los denominadores como factores. Esto es, el MCD es el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.

Cuando dividimos ambos lados entre Pt, suponemos que $Pt \neq 0$, ya que no podemos dividir entre 0. Suposiciones semejantes se harán al resolver otras ecuaciones con literales.

b. *La ecuación $S = P + Prt$ es la fórmula para el valor S de una inversión de un capital de P dólares a un interés anual simple r durante un periodo de t años. Resolver para P.*

Solución:

$$S = P + Prt,$$

$$S = P(1 + rt) \qquad \text{(factorizando)},$$

$$\frac{S}{1 + rt} = P \qquad \text{(dividiendo ambos lados entre } 1 + rt\text{)}.$$

Principios en práctica 5

Resolución de una ecuación con literales

La fórmula $S = 4\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$ proporciona el área de la superficie S de una esfera con diámetro d. ¿Cuál es la longitud del lado de la caja más pequeña que podrá contener una bola con área de superficie igual a S?

EJEMPLO 7 Resolución de una ecuación con literales

Resolver $(a + c)x + x^2 = (x + a)^2$ para x.

Solución: primero debemos simplificar la ecuación y después colocar todos los términos que incluyan a x en un lado:

$$(a + c)x + x^2 = (x + a)^2,$$

$$ax + cx + x^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$

$$ax + cx = 2ax + a^2,$$

$$cx - ax = a^2,$$

$$x(c - a) = a^2,$$

$$x = \frac{a^2}{c - a}.$$

Ejercicio 1.1

En los problemas del 1 al 6 determine por sustitución cuáles de los números dados satisfacen la ecuación.

1. $9x - x^2 = 0$; 1, 0.

2. $20 - 9x = -x^2$; 5,4.

3. $y + 2(y - 3) = 4$; $\frac{10}{3}$, 1.

4. $2x + x^2 - 8 = 0$; 2, -4.

5. $x(6 + x) - 2(x + 1) - 5x = 4$; -2, 0.

6. $x(x + 1)^2(x + 2) = 0$; 0, -1, 2.

En los problemas del 7 al 16 determine qué operaciones se aplicaron a la primera ecuación para obtener la segunda. Establezca si las operaciones garantizan o no que las ecuaciones sean equivalentes. No resuelva las ecuaciones.

7. $x - 5 = 4x + 10$; $x = 4x + 15$.

8. $8x - 4 = 16$; $x - \frac{1}{2} = 2$.

9. $x = 3$; $x^4 = 81$.

10. $\frac{1}{2}x^2 + 3 = x - 9$; $x^2 + 6 = 2x - 18$.

11. $x^2 - 2x = 0$; $x - 2 = 0$.

12. $\dfrac{2}{x - 2} + x = x^2$; $2 + x(x - 2) = x^2(x - 2)$.

13. $\dfrac{x^2-1}{x-1}=3;\ x^2-1=3(x-1).$

14. $x(x+11)(x+9)=x(x+5);$
$(x+11)(x+9)=x+5.$

15. $\dfrac{x(x+1)}{x-5}=x(x+9);\ x+1=(x+9)(x-5).$

16. $2x^2-9=x;\ x^2-\frac{1}{2}x=\frac{9}{2}.$

En los problemas del 17 al 46, resuelva las ecuaciones.

17. $4x=10.$

18. $0.2x=7.$

19. $3y=0.$

20. $2x-4x=-5.$

21. $-5x=10-15.$

22. $3-2x=4.$

23. $5x-3=9.$

24. $\sqrt{2}x+3=8.$

25. $7x+7=2(x+1).$

26. $6z+5z-3=41.$

27. $2(p-1)-3(p-4)=4p.$

28. $t=2-2[2t-3(1-t)].$

29. $\dfrac{x}{5}=2x-6.$

30. $\dfrac{5y}{7}-\dfrac{6}{7}=2-4y.$

31. $7+\dfrac{4x}{9}=\dfrac{x}{2}.$

32. $\dfrac{x}{3}-4=\dfrac{x}{5}.$

33. $q=\dfrac{3}{2}q-4.$

34. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}=7.$

35. $3x+\dfrac{x}{5}-5=\dfrac{1}{5}+5x.$

36. $y-\dfrac{y}{2}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{y}{4}=\dfrac{y}{5}.$

37. $\dfrac{2y-3}{4}=\dfrac{6y+7}{3}.$

38. $\dfrac{p}{3}+\dfrac{3}{4}p=\dfrac{9}{2}(p-1).$

39. $w+\dfrac{w}{2}-\dfrac{w}{3}+\dfrac{w}{4}=5.$

40. $\dfrac{7+2(x+1)}{3}=\dfrac{6x}{5}.$

41. $\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{2-x}{6}=x-2.$

42. $\dfrac{x}{5}+\dfrac{2(x-4)}{10}=7.$

43. $\dfrac{9}{5}(3-x)=\dfrac{3}{4}(x-3).$

44. $\dfrac{2y-7}{3}+\dfrac{8y-9}{14}=\dfrac{3y-5}{21}.$

45. $\dfrac{3}{2}(4x-3)=2[x-(4x-3)].$

46. $(3x-1)^2-(5x-3)^2=-(4x-2)^2.$

En los problemas del 47 al 54 exprese el símbolo indicado en términos de los símbolos restantes.

47. $I=Prt;\ P.$

48. $ax+b=0;\ x.$

49. $p=8q-1;\ q.$

50. $p=-3q+6;\ q.$

51. $S=P(1+rt);\ r.$

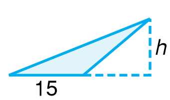
52. $r=\dfrac{2mI}{B(n+1)};\ m.$

53. $S=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n);\ a_1.$

54. $S=\dfrac{R[(1+i)^n-1]}{i};\ R.$

55. Geometría Utilice la fórmula $P=2l+2w$ para determinar el ancho w de un rectángulo con perímetro P de 960 m, cuyo largo l es de 360 m.

56. Geometría Utilice la fórmula $A=\frac{1}{2}bh$ para determinar la altura h de un triángulo con área de 75 cm^2, cuya base b es 15 cm.



57. Impuesto de venta Un agente de ventas necesita calcular el costo de un artículo con un impuesto de venta de 8.25%. Escriba una ecuación que represente el costo total c de un artículo que cuesta x dólares.

58. Ingreso El ingreso mensual total de una guardería obtenido del cuidado de x niños está dado por $r=450x$, y sus costos mensuales totales están dados por $c=380x+3500$. ¿Cuántos niños se necesitan inscribir mensualmente para llegar al punto de equilibrio? En otras palabras, ¿cuándo los ingresos igualan a los costos?

59. Depreciación lineal Si usted compra un artículo para uso empresarial, al preparar la declaración de impuestos usted puede repartir su costo entre toda la vida útil del artículo. Esto se denomina *depreciación*. Un método de depreciación es la *depreciación lineal*, en la que la depreciación anual se calcula dividiendo el costo del artículo, menos su valor de rescate, entre su vida útil. Supóngase que el costo es C dólares, la vida útil es N años y no hay valor de rescate. Entonces el valor V (en dólares) del artículo al final de n años está dado por

$$V=C\left(1-\frac{n}{N}\right).$$

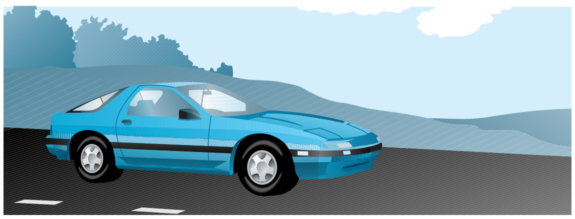
Si el mobiliario nuevo de una oficina se compró por \$3200, tiene una vida útil de 8 años y no tiene valor de rescate, ¿después de cuántos años tendrá un valor de \$2000?

60. Ondas de radar Cuando se utiliza un radar para determinar la velocidad de un automóvil en una autopista, una onda es enviada desde el radar y reflejada por el automóvil en movimiento. La diferencia F (en ciclos por segundo) de la frecuencia entre la onda original y la reflejada está dada por

$$F = \frac{vf}{334.8},$$

donde v es la velocidad del automóvil en millas por hora y f la frecuencia de la onda original (en megaciclos por segundo).

Suponga que usted está manejando en una autopista que tiene un límite de velocidad de 65 millas por hora. Un oficial de la policía dirige una onda de radar con una frecuencia de 2450 megaciclos por segundo a su automóvil y observa que la diferencia en las frecuencias es de 495 ciclos por segundo. ¿El oficial puede reclamarle que iba a exceso de velocidad?



61. Ahorros Paula y Sam quieren comprar una casa, de modo que han decidido ahorrar la cuarta parte de sus respectivos salarios. Paula gana \$24.00 por hora y recibe \$8.00 extra a la semana, por declinar las prestaciones de la empresa, mientras que Sam gana \$28.00 por hora más las prestaciones. Ellos quieren ahorrar al menos \$405.00 semanales. Si trabajan el mismo número de horas, ¿cuántas horas debe trabajar cada uno de ellos cada semana?

62. Gravedad La ecuación $h = -4.9t^2 + m$ es la fórmula para la altura h, en metros, de un objeto t segundos después que es soltado desde una posición inicial de m metros. ¿Cuánto tiempo t ha estado cayendo un objeto, si éste ha caído desde una altura m y ahora está a una altura h?

63. Expansión lineal Cuando los objetos sólidos son calentados se expanden en longitud –es la razón por la que en el pavimento y en los puentes se colocan juntas de expansión. Por lo general, cuando la temperatura de un cuerpo sólido de longitud I_0 se incremente desde T_0 hasta T, la longitud, I, del cuerpo está dada por

$$I = I_0[1 + \alpha(T - T_0)],$$

donde α (letra griega *alfa*) se denomina *coeficiente de expansión lineal*. Suponga que una varilla de metal de 1 m de longitud a 0 °C se expande 0.001 m cuando se calienta desde 0 hasta 100 °C. Encuentre el coeficiente de expansión lineal.

64. Relación presa-depredador Para estudiar la relación presa-depredador, se realizó un experimento[4] en el que un sujeto con los ojos vendados, el "depredador", se puso al frente de una mesa cuadrada de 3 pies por lado en la que se colocaron uniformemente distribuidos, discos de papel de lija como "presa". Durante un minuto el "depredador" buscó los discos dando golpecitos suaves con un dedo. Siempre que se encontraba con un disco lo retiraba y reanudaba la búsqueda. El experimento fue repetido para varias densidades de discos (número de discos por 9 pies^2). Se estimó que si y es el número de discos retirados en 1 minuto cuando x discos están en la mesa, entonces

$$y = a(1 - by)x,$$

donde a y b son constantes. Resuelva esta ecuación para y.

En los problemas del 65 al 68 utilice una calculadora gráfica para determinar, si los hay, cuáles de los números dados son raíces de la ecuación dada.

65. $112x^2 = 6x + 1;\ \frac{1}{8}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{14}.$

66. $8x^3 + 11x + 21 = 58x^2;\ 7, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}.$

67. $\dfrac{3.1t - 7}{4.8t - 2} = 7;\ \sqrt{6}, -\dfrac{47}{52}, \dfrac{14}{61}.$

68. $\left(\dfrac{v}{v + 3}\right)^2 = v;\ 0, \dfrac{27}{4}, \dfrac{13}{3}.$

OBJETIVO Resolver ecuaciones fraccionarias y con radicales que conducen a ecuaciones lineales.

1.2 Ecuaciones que conducen a ecuaciones lineales

Ecuaciones fraccionarias

En esta sección, ilustramos que al resolver una ecuación no lineal puede suceder que ésta se reduzca a una ecuación lineal. Empezamos con una **ecuación fraccionaria,** que es una ecuación en que una incógnita está en un denominador.

Principios en práctica 1

Resolución de una ecuación fraccionaria

Un bote que viaja a una velocidad r, recorre 10 millas río abajo en una corriente de 2 millas por hora; al mismo tiempo un bote que viaja a la misma velocidad recorre 6 millas río arriba en contra de la corriente. Escriba una ecuación que describa esta situación, y determine la velocidad de los botes.

EJEMPLO 1 Resolución de una ecuación fraccionaria

Resolver $\dfrac{5}{x - 4} = \dfrac{6}{x - 3}.$

[4] C. S. Holling, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism", *The Canadian Entomologist*, XCI, núm. 7 (1959), 385-398.

Solución:

Estrategia: primero escribimos la ecuación de manera que no tenga fracciones. Después utilizamos las técnicas algebraicas comunes para resolver la ecuación lineal resultante.

Multiplicando ambos lados por el MCD, $(x-4)(x-3)$, tenemos

$$(x-4)(x-3)\left(\frac{5}{x-4}\right) = (x-4)(x-3)\left(\frac{6}{x-3}\right),$$

$$5(x-3) = 6(x-4) \qquad \text{(ecuación lineal),}$$

$$5x - 15 = 6x - 24,$$

$$9 = x.$$

En el primer paso, multiplicamos cada lado por una expresión que incluya a la *variable* x. Como mencionamos en la sección 1.1, esto significa que no estamos garantizando que la última ecuación sea equivalente a la *original*. Así, debemos verificar si 9 satisface o no la ecuación *original*. Sustituyendo 9 por x en la ecuación, obtenemos

$$\frac{5}{9-4} = \frac{6}{9-3},$$

$$1 = 1,$$

que es un enunciado verdadero. Por tanto, 9 es una raíz.

Una resolución alternativa que evita la multiplicación de ambos lados por el MCD es como sigue:

$$\frac{5}{x-4} - \frac{6}{x-3} = 0.$$

Suponiendo que x no es 3 ni 4 y combinando las fracciones tenemos

$$\frac{9-x}{(x-4)(x-3)} = 0.$$

Una fracción puede ser 0 sólo cuando su numerador es 0 y su denominador es distinto de cero. Por tanto, $x = 9$.

Algunas ecuaciones que no son lineales no tienen solución. En ese caso, decimos que el conjunto solución es el **conjunto vacío** o **conjunto nulo,** al que denotamos por { } o $\varnothing$. El ejemplo 2 ilustra lo anterior.

EJEMPLO 2 Resolución de ecuaciones fraccionarias

a. *Resolver* $\dfrac{3x+4}{x+2} - \dfrac{3x-5}{x-4} = \dfrac{12}{x^2-2x-8}$.

Solución: al observar los denominadores y notar que

$$x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4),$$

concluimos que el MCD es $(x+2)(x-4)$. Multiplicando ambos miembros por el MCD, tenemos

$$(x+2)(x-4)\left(\frac{3x+4}{x+2} - \frac{3x-5}{x-4}\right) = (x+2)(x-4)\cdot\frac{12}{(x+2)(x-4)},$$

$$(x-4)(3x+4) - (x+2)(3x-5) = 12,$$

$$3x^2 - 8x - 16 - (3x^2 + x - 10) = 12,$$

$$3x^2 - 8x - 16 - 3x^2 - x + 10 = 12,$$

$$-9x - 6 = 12,$$

$$-9x = 18,$$

$$x = -2. \qquad \textbf{(1)}$$

Sin embargo, la ecuación *original* no está definida para $x = -2$ (no podemos dividir entre cero), de modo que no existen raíces. Así, el conjunto solución es $\varnothing$. Aunque -2 es una solución de la ecuación (1), no lo es de la ecuación *original,* por lo que se le denomina **solución extraña** de la ecuación original.

b. *Resolver* $\dfrac{4}{x-5} = 0.$

Solución: la única manera que una fracción puede ser igual a cero es cuando el numerador es 0 pero su denominador no. Ya que el numerador, 4, nunca es 0, el conjunto solución es $\varnothing$.

■ ***Principios en práctica 2***
Ecuación con literales

El tiempo que le toma a un aeroplano recorrer una distancia dada con viento a favor, puede calcularse dividiendo la distancia entre la suma de la velocidad del aeroplano y la velocidad del viento. Escriba una ecuación que calcule el tiempo t que le toma a un aeroplano, que viaja a una velocidad r con un viento w, cubrir una distancia d. Resuelva la ecuación para w.

EJEMPLO 3 Ecuación con literales

Si $s = \dfrac{u}{au+v}$, *exprese u en términos de las restantes letras; esto es, resolver para u.*

Solución:

Estrategia: como la incógnita, u, está en el denominador, primero quitamos las fracciones y después resolvemos para u.

$$s = \frac{u}{au+v},$$

$$s(au+v) = u \qquad \text{(multiplicando ambos lados por } au+v\text{)},$$

$$sau + sv = u,$$

$$sau - u = -sv,$$

$$u(sa-1) = -sv,$$

$$u = \frac{-sv}{sa-1} = \frac{sv}{1-sa}.$$

Ecuaciones con radicales

Una **ecuación con radicales** (ecuación radical) es aquélla en la que una incógnita aparece en un radicando. Los dos ejemplos siguientes ilustran las técnicas empleadas para resolver tales ecuaciones.

■ ***Principios en práctica 3***
Resolución de una ecuación con radicales

La diferencia entre la longitud de una rampa y la longitud de la distancia horizontal que cubre es de 2 pies. El cuadrado de la distancia vertical que cubre la rampa es de 16 pies cuadrados. Escriba una ecuación para la diferencia y resuélvala. ¿Cuál es la longitud de la rampa?

EJEMPLO 4 Resolución de una ecuación con radicales

Resolver $\sqrt{x^2+33} - x = 3.$

Solución: para resolver esta ecuación radical, elevamos ambos miembros a la misma potencia para eliminar el radical. Esta operación *no* garantiza la equivalencia, de modo que debemos verificar las "soluciones" resultantes. Empezamos aislando el radical en un lado. Después elevamos al cuadrado ambos lados y despejamos utilizando las técnicas comunes. Así,

$$\sqrt{x^2+33} = x+3,$$

$$x^2 + 33 = (x+3)^2 \qquad \text{(elevando al cuadrado ambos lados),}$$

$$x^2 + 33 = x^2 + 6x + 9,$$
$$24 = 6x,$$
$$4 = x.$$

Por sustitución se debe demostrar que 4 es en realidad una raíz.

Con algunas ecuaciones radicales puede tener que elevar ambos lados a la misma potencia en más de una ocasión, como lo muestra el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Resolución de una ecuación con radicales

Resolver $\sqrt{y-3} - \sqrt{y} = -3$.

Solución: cuando una ecuación tiene dos términos que implican radicales, primero la escribimos de modo que esté un radical en cada lado, si es posible. Después elevamos al cuadrado y resolvemos. Tenemos

La razón por la que deseamos una radical en cada lado es para eliminar elevando al cuadrado un binomio con dos radicales diferentes.

$$\sqrt{y-3} = \sqrt{y} - 3,$$
$$y - 3 = y - 6\sqrt{y} + 9 \quad \text{(elevando ambos lados al cuadrado),}$$
$$6\sqrt{y} = 12,$$
$$\sqrt{y} = 2,$$
$$y = 4 \quad \text{(elevando ambos lados al cuadrado).}$$

Sustituyendo 4 en el lado izquierdo de la ecuación *original* nos da $\sqrt{1} - \sqrt{4}$, que es -1. Ya que este resultado no es igual al del lado derecho, -3, no hay solución. Esto es, el conjunto solución es $\varnothing$. Aquí 4 es una solución extraña.

Ejercicio 1.2

En los problemas del 1 al 34 resuelva las ecuaciones.

1. $\dfrac{5}{x} = 25.$

2. $\dfrac{4}{x-1} = 2.$

3. $\dfrac{7}{3-x} = 0.$

4. $\dfrac{5x-2}{x+1} = 0.$

5. $\dfrac{4}{8-x} = \dfrac{3}{4}.$

6. $\dfrac{x+3}{x} = \dfrac{2}{5}.$

7. $\dfrac{q}{5q-4} = \dfrac{1}{3}.$

8. $\dfrac{4p}{7-p} = 1.$

9. $\dfrac{1}{p-1} = \dfrac{2}{p-2}.$

10. $\dfrac{2x-3}{4x-5} = 6.$

11. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}.$

12. $\dfrac{4}{t-3} = \dfrac{3}{t-4}.$

13. $\dfrac{3x-2}{2x+3} = \dfrac{3x-1}{2x+1}.$

14. $\dfrac{x+2}{x-1} + \dfrac{x+1}{3-x} = 0.$

15. $\dfrac{y-6}{y} - \dfrac{6}{y} = \dfrac{y+6}{y-6}.$

16. $\dfrac{y-3}{y+3} = \dfrac{y-3}{y+2}.$

17. $\dfrac{-4}{x-1} = \dfrac{7}{2-x} + \dfrac{3}{x+1}.$

18. $\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{4}{1-2x}.$

19. $\dfrac{9}{x-3} = \dfrac{3x}{x-3}.$

20. $\dfrac{x}{x+3} - \dfrac{x}{x-3} = \dfrac{3x-4}{x^2-9}.$

21. $\sqrt{x+5} = 4.$

22. $\sqrt{z-2} = 3.$

23. $\sqrt{5x-6} - 16 = 0.$

24. $6 - \sqrt{2x+5} = 0.$

25. $\sqrt{\frac{x}{2}+1}=\frac{2}{3}$.

26. $(x+6)^{1/2}=7$.

27. $\sqrt{4x-6}=\sqrt{x}$.

28. $\sqrt{5+2x}=\sqrt{4x-2}$.

29. $(x-3)^{3/2}=8$.

30. $\sqrt{y^2-9}=9-y$.

31. $\sqrt{y}+\sqrt{y+2}=3$.

32. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}=1$.

33. $\sqrt{z^2+2z}=3+z$.

34. $\sqrt{\frac{1}{w}}-\sqrt{\frac{2}{5w-2}}=0$.

En los problemas del 35 al 38 exprese la letra indicada en términos de las letras restantes.

35. $r=\frac{d}{1-dt}$; t.

36. $\frac{x-a}{b-x}=\frac{x-b}{a-x}$; x.

37. $r=\frac{2ml}{B(n+1)}$; n.

38. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$; q.

39. Densidad de presas En cierta área el número, y, de larvas de polillas consumidas por un solo escarabajo depredador en un periodo determinado, está dado por

$$y=\frac{1.4x}{1+0.09x},$$

en donde x es la *densidad de presas* (el número de larvas por unidad de área). ¿Qué densidad de larvas permitiría sobrevivir a un escarabajo, si éste necesita consumir 10 larvas en el periodo dado?

40. Horas de servicio Supóngase que la razón del número de horas que una tienda de video está abierta al número de clientes diarios es constante. Cuando la tienda está abierta 8 horas, el número de clientes es 92 menos que el número máximo de clientes. Cuando la tienda permanece abierta 10 horas, el número de clientes es 46 menos que el número máximo de clientes. Escriba una ecuación que describa esta situación y determine el número máximo de clientes diarios.

41. Tiempo de viaje El tiempo que le toma a un bote recorrer una distancia dada río arriba (en contra de la corriente), puede calcularse dividiendo la distancia entre la diferencia de la velocidad del bote y la velocidad de la corriente. Escriba una ecuación que calcule el tiempo t que le toma a un bote, que se mueve a una velocidad r en contra de una corriente c, recorrer una distancia d. Resuelva su ecuación para r.

42. Longitud de una rampa La diferencia entre la longitud de una rampa y la longitud horizontal que cubre es de 5 pies. El cuadrado de la distancia vertical que cubre la rampa es 45 pies cuadrados. Escriba una ecuación para la diferencia y resuélvala. ¿Cuál es la longitud de la rampa?

43. Horizonte de la radio El rango de trasmisión, en metros, de un trasmisor VHF de radio, es 4.1 veces la raíz cuadrada de la altura por encima del suelo de la antena, medida en metros. La antena A se coloca 8.25 m más arriba que la antena B y puede trasmitir 6.15 km más lejos. ¿Qué tan arriba del suelo están colocadas las antenas A y B?

44. Derrape de un automóvil La policía ha usado la fórmula $s=\sqrt{30\,fd}$ para estimar la velocidad s (en millas por hora) de un automóvil, si éste derrapó un tramo de d pies cuando se detuvo. La literal f es el coeficiente de fricción, determinado por la clase de camino (como concreto, asfalto, grava o alquitrán) y si está húmedo o seco. Algunos valores de f se dan en la tabla 1.1. ¿A 40 millas por hora, aproximadamente cuántos pies derrapará un automóvil en un camino de concreto seco? Dé la respuesta al pie más cercano.

TABLA 1.1

	Concreto	Alquitrán
Húmedo	0.4	0.5
Seco	0.8	1.0

OBJETIVO Resolver ecuaciones cuadráticas por medio de factorización o con la fórmula cuadrática.

1.3 Ecuaciones cuadráticas

Para aprender cómo resolver problemas más complejos, pasemos a los métodos de solución de *ecuaciones cuadráticas*.

Definición

Una ***ecuación cuadrática*** en la variable x es una ecuación que puede escribirse en la forma

$$ax^2+bx+c=0, \tag{1}$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

Una ecuación cuadrática también se conoce como *ecuación de segundo grado* o *ecuación de grado dos*, ya que la potencia más grande que aparece en ella es la segunda. Mientras que una ecuación lineal sólo tiene una raíz, una ecuación cuadrática puede tener dos raíces diferentes.

Solución por factorización

Un método útil para resolver ecuaciones cuadráticas se basa en la factorización, como lo muestran los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 Resolución de ecuaciones cuadráticas por factorización

a. *Resolver* $x^2 + x - 12 = 0$.

Solución: el lado izquierdo se factoriza con facilidad:

$$(x - 3)(x + 4) = 0.$$

Piense en esto como dos cantidades, $x - 3$ y $x + 4$, cuyo producto es cero. **Siempre que el producto de dos o más números sea *cero*, entonces, al menos uno de los números *debe* ser cero.** Esto significa que

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 4 = 0.$$

Resolviendo éstas tenemos $x = 3$ y $x = -4$. Por tanto, la raíces de la ecuación original son 3 y –4, y el conjunto solución es $\{3, -4\}$.

b. *Resolver* $6w^2 = 5w$.

Solución: escribimos la ecuación como

$$6w^2 - 5w = 0,$$

de modo que un miembro sea 0. Factorizando nos da

$$w(6w - 5) = 0.$$

Haciendo cada factor igual a cero, tenemos

$$w = 0 \quad \text{o} \quad 6w - 5 = 0.$$
$$6w = 5.$$

Por tanto, las raíces son $w = 0$ y $w = \frac{5}{6}$. Observe que si hubiésemos dividido ambos miembros de $6w^2 = 5w$ *entre* w y obtenido $6w = 5$, nuestra única solución sería $w = \frac{5}{6}$. Esto es, se habría perdido la raíz $w = 0$. Esto confirma nuestro estudio de la operación 5 en la sección 1.1.

Principios en práctica 1

Resolución de una ecuación cuadrática por factorización

Un número elevado al cuadrado es 30 veces más que el número. ¿Cuál es el número?

No divida ambos miembros entre w (una variable), ya que esto no garantiza la equivalencia y podríamos “perder” una raíz.

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación cuadrática por factorización

Resolver $(3x - 4)(x + 1) = -2$.

Advertencia Usted debe abordar un problema como éste con cuidado. Si el producto de dos cantidades es igual a -2, no es verdadero que al menos una de las dos cantidades debe ser -2. ¿Por qué? **No** debe tomar cada factor igual a -2; al hacerlo así no obtendrá soluciones de la ecuación dada.

Solución: primero multiplicamos los factores del miembro izquierdo:

Principios en práctica 2

Resolución de una ecuación cuadrática por factorización

El área de un mural rectangular, que tiene un ancho de 10 pies menos que su largo, es de 3000 pies cuadrados. ¿Cuáles son las dimensiones del mural?

$$3x^2 - x - 4 = -2.$$

Al reescribirla de modo que 0 aparezca en un miembro, tenemos

$$3x^2 - x - 2 = 0,$$
$$(3x + 2)(x - 1) = 0,$$
$$x = -\frac{2}{3}, 1.$$

Algunas ecuaciones que no son cuadráticas pueden resolverse por factorización, como lo muestra el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Resolución de ecuaciones de grado superior por factorización

a. *Resolver* $4x - 4x^3 = 0$.

Solución: ésta es una *ecuación de tercer grado*. Procedemos a resolverla como sigue:

$$4x - 4x^3 = 0,$$
$$4x(1 - x^2) = 0 \qquad \text{(factorizando)},$$
$$4x(1 - x)(1 + x) = 0 \qquad \text{(factorizando)}.$$

No deje de tomar en cuenta que el factor x da lugar a una raíz.

Al hacer cada uno de los factores igual a cero, obtenemos $4 = 0$ (lo cual es imposible), $x = 0$, $1 - x = 0$, o bien $1 + x = 0$. Así,

$$x = 0, 1, -1,$$

que podemos escribir como $x = 0, \ \pm 1$.

b. *Resolver* $x(x + 2)^2(x + 5) + x(x + 2)^3 = 0$.

Solución: factorizando $x(x + 2)^2$ en ambos términos del miembro izquierdo, tenemos

$$x(x + 2)^2[(x + 5) + (x + 2)] = 0,$$
$$x(x + 2)^2(2x + 7) = 0.$$

De aquí que, $x = 0$, $x + 2 = 0$, o bien $2x + 7 = 0$, de lo cual concluimos que $x = 0, -2, -\frac{7}{2}$.

Principios en práctica 3

Resolución de una ecuación de grado más alto por factorización

Un prisma rectangular, con base cuadrada y altura que es 5 veces más larga que su ancho, tiene un volumen que es igual a 5 veces su ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del prisma rectangular?

EJEMPLO 4 Una ecuación fraccionaria que se reduce a una ecuación cuadrática

Resolver

$$\frac{y + 1}{y + 3} + \frac{y + 5}{y - 2} = \frac{7(2y + 1)}{y^2 + y - 6}. \qquad (2)$$

Solución: multiplicando ambos lados por el MCD, $(y + 3)(y - 2)$, obtenemos

$$(y - 2)(y + 1) + (y + 3)(y + 5) = 7(2y + 1). \qquad (3)$$

Ya que la ecuación (2) se multiplicó por una expresión que incluye a la variable y, recuerde (de la sección 1.1) que la ecuación (3) no es necesariamente equivalente a la (2). Después de simplificar la ecuación (3) tenemos

$$2y^2 - 7y + 6 = 0 \qquad \text{(ecuación cuadrática),}$$

$$(2y - 3)(y - 2) = 0 \qquad \text{(factorizando).}$$

Por tanto, $\frac{3}{2}$ y 2 son *posibles* raíces de la ecuación dada. Pero 2 no puede ser raíz de la ecuación (2) ya que la sustitución conduce a un denominador de 0. Sin embargo, debemos verificar que $\frac{3}{2}$ en verdad satisface la ecuación *original* para concluir así que es la raíz.

No concluya de manera precipitada que la solución de $x^2 = 3$ sólo consiste en $x = \sqrt{3}$.

Principios en práctica 4

Solución por medio de factorización

Si usted ganó \$225 por la venta de x artículos a x dólares cada uno, ¿cuántos artículos vendió y a qué precio vendió cada uno de ellos?

EJEMPLO 5 Solución por factorización

Resolver $x^2 = 3$.

Solución:

$$x^2 = 3,$$

$$x^2 - 3 = 0.$$

Factorizando, obtenemos

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0.$$

Por tanto, $x - \sqrt{3} = 0$ o bien $x + \sqrt{3} = 0$, de modo que $x = \pm\sqrt{3}$.

Una forma más general de la ecuación $x^2 = 3$, es $u^2 = k$. Como antes, podemos mostrar lo siguiente

$$\text{Si } u^2 = k, \qquad \text{entonces} \qquad u = \pm\sqrt{k}. \qquad \textbf{(4)}$$

Fórmula cuadrática

Resolver ecuaciones cuadráticas por factorización puede ser muy difícil, como es evidente al tratar ese método en la ecuación $0.7x^2 - \sqrt{2}x - 8\sqrt{5} = 0$. Sin embargo, existe una fórmula llamada *fórmula cuadrática*[5] que da las raíces de cualquier ecuación cuadrática

Fórmula cuadrática

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, en donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$, están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Advertencia Asegúrese de utilizar la fórmula cuadrática correctamente.

$$x \neq -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

[5]Una deducción de la fórmula cuadrática aparece en la sección 1.4.

Principios en práctica 5

Una ecuación cuadrática con dos raíces reales

Supóngase que la altura h, en pies, de fuegos artificiales lanzados directamente hacia arriba desde el nivel del suelo, está dada por $h = 160t - 16t^2$, en donde t está en segundos. ¿En cuánto tiempo los fuegos artificiales estarán a 300 pies del suelo?

EJEMPLO 6 Una ecuación cuadrática con dos raíces reales

Resolver $4x^2 - 17x + 15 = 0$ *mediante la fórmula cuadrática.*

Solución: aquí $a = 4$, $b = -17$ y $c = 15$. Por tanto,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4(4)(15)}}{2(4)}$$

$$= \frac{17 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{17 \pm 7}{8}.$$

Las raíces son $\frac{17+7}{8} = \frac{24}{8} = 3$ y $\frac{17-7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.

Principios en práctica 6

Una ecuación cuadrática con una raíz real

Supóngase que el ingreso semanal r de una compañía está dado por la ecuación $r = -2p^2 + 400p$, en donde p es el precio del producto que vende la compañía. ¿Cuál es el precio del producto si el ingreso semanal es de $20,000?

EJEMPLO 7 Una ecuación cuadrática con una raíz real

Resolver $2 + 6\sqrt{2}y + 9y^2 = 0$ *por medio de la fórmula cuadrática.*

Solución: vea el acomodo de los términos. Aquí $a = 9$, $b = 6\sqrt{2}$, y $c = 2$. Por lo que,

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{2(9)}.$$

Así,

$$y = \frac{-6\sqrt{2} + 0}{18} = -\frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{o} \quad y = \frac{-6\sqrt{2} - 0}{18} = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Por tanto, la única raíz es $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Principios en práctica 7

Una ecuación cuadrática sin raíces reales

Supóngase que la altura h, en pies, de fuegos artificiales lanzados directamente hacia arriba, desde el nivel del piso, está dada por $h = 160t - 16t^2$, en donde t está en segundos. ¿Cuándo estarán los fuegos artificiales a 500 pies del piso?

EJEMPLO 8 Una ecuación cuadrática sin raíces reales

Resolver por medio de la fórmula cuadrática $z^2 + z + 1 = 0$.

Solución: aquí $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$. Las raíces son

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

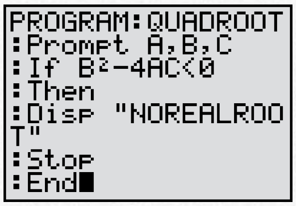
Ahora $\sqrt{-3}$ denota un número cuyo cuadrado es -3. Sin embargo, no existe tal número real, ya que el cuadrado de cualquier número real es no negativo. Entonces la ecuación no tiene raíces reales.[6]

[6] $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ puede expresarse como $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, en donde $i = \sqrt{-1}$ se denomina *unidad imaginaria*.

Esto describe la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática.

De los ejemplos 6 al 8 puede verse que una ecuación cuadrática tiene dos raíces reales y diferentes, una raíz real, o bien no tiene raíces reales, dependiendo de que $b^2 - 4ac > 0$, $= 0$ o < 0, respectivamente.

Tecnología



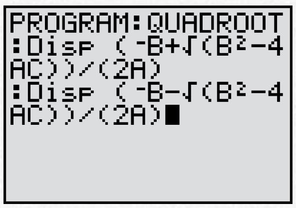


FIGURA 1.2 Programa para encontrar las raíces reales de $Ax^2 + Bx + C = 0$.

Mediante la característica de programación de una calculadora gráfica, puede crearse un programa que proporcione las raíces reales de la ecuación cuadrática $Ax^2 + Bx + C = 0$. La figura 1.2 muestra un programa para la calculadora gráfica TI-83. A fin de ejecutarlo para

$$20x^2 - 33x + 10 = 0,$$

se le pide que introduzca los valores de A, B y C (véase la fig. 1.3). Las raíces resultantes son $x = 1.25$ y $x = 0.4$.

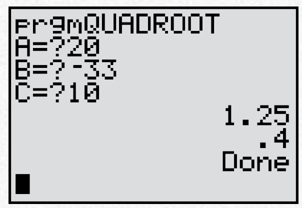


FIGURA 1.3 Raíces de $20x^2 - 33x + 10 = 0$.

Formas cuadráticas

Algunas veces una ecuación que no es cuadrática puede transformarse en cuadrática por medio de una sustitución adecuada. En este caso se dice que la ecuación dada tiene **forma cuadrática.** El ejemplo siguiente lo ilustrará.

EJEMPLO 9 Resolución de una ecuación que tiene forma cuadrática

Resolver $\dfrac{1}{x^6} + \dfrac{9}{x^3} + 8 = 0$.

Solución: esta ecuación puede escribirse como

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{x^3}\right) + 8 = 0.$$

de modo que es cuadrática en $1/x^3$, por lo que tiene forma cuadrática. Al sustituir la variable w por $1/x^3$ obtenemos una ecuación cuadrática en la variable w, la cual podemos resolver:

$$w^2 + 9w + 8 = 0,$$
$$(w + 8)(w + 1) = 0,$$
$$w = -8 \quad \text{o} \quad w = -1.$$

No suponga que -8 y -1 son soluciones de la ecuación *original*.

Regresando a la variable x, tenemos

$$\frac{1}{x^3} = -8 \quad \text{o} \quad \frac{1}{x^3} = -1.$$

Así,

$$x^3 = -\frac{1}{8} \quad \text{o} \quad x^3 = -1.$$

de lo cual se concluye que

$$x = -\frac{1}{2}, -1.$$

Al verificar, encontramos que estos valores de x satisfacen la ecuación original.

Ejercicio 1.3

En los problemas del 1 al 30 resuelva por factorización.

1. $x^2 - 4x + 4 = 0.$

2. $t^2 + 3t + 2 = 0.$

3. $y^2 - 7y + 12 = 0.$

4. $x^2 + x - 12 = 0.$

5. $x^2 - 2x - 3 = 0.$

6. $x^2 - 16 = 0.$

7. $u^2 - 13u = -36.$

8. $3w^2 - 12w + 12 = 0.$

9. $x^2 - 4 = 0.$

10. $2x^2 + 4x = 0.$

11. $z^2 - 8z = 0.$

12. $x^2 + 9x = -14.$

13. $4x^2 + 1 = 4x.$

14. $2z^2 + 9z = 5.$

15. $y(2y + 3) = 5.$

16. $8 + 2x - 3x^2 = 0.$

17. $-x^2 + 3x + 10 = 0.$

18. $\frac{1}{7}y^2 = \frac{3}{7}y.$

19. $2p^2 = 3p.$

20. $-r^2 - r + 12 = 0.$

21. $x(x + 4)(x - 1) = 0.$

22. $(x - 2)^2(x + 1)^2 = 0.$

23. $x^3 - 64x = 0.$

24. $x^3 - 4x^2 - 5x = 0.$

25. $6x^3 + 5x^2 - 4x = 0.$

26. $(x + 1)^2 - 5x + 1 = 0.$

27. $(x + 3)(x^2 - x - 2) = 0.$

28. $3(x^2 + 3x - 10)(x - 8) = 0.$

29. $p(p - 3)^2 - 4(p - 3)^3 = 0.$

30. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0.$

En los problemas del 31 al 44 encuentre todas las raíces reales usando la fórmula cuadrática.

31. $x^2 + 2x - 24 = 0.$

32. $x^2 - 2x - 15 = 0.$

33. $4x^2 - 12x + 9 = 0.$

34. $p^2 + 2p = 0.$

35. $p^2 - 7p + 3 = 0.$

36. $2 - 2x + x^2 = 0.$

37. $4 - 2n + n^2 = 0.$

38. $2x^2 + x = 5.$

39. $6x^2 + 7x - 5 = 0.$

40. $w^2 - 2\sqrt{2}w + 2 = 0.$

41. $0.02w^2 - 0.3w = 20.$

42. $0.01x^2 + 0.2x - 0.6 = 0.$

43. $2x^2 + 4x = 5.$

44. $-2x^2 - 6x + 5 = 0.$

En los problemas del 45 al 54 resuelva la ecuación dada que tiene forma cuadrática.

45. $x^4 - 5x^2 + 6 = 0.$

46. $x^4 - 3x^2 - 10 = 0.$

47. $\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x} - 2 = 0.$

48. $x^{-2} + x^{-1} - 12 = 0.$

49. $x^{-4} - 9x^{-2} + 20 = 0.$

50. $\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{9}{x^2} + 8 = 0.$

51. $(x - 3)^2 + 9(x - 3) + 14 = 0.$

52. $(x + 5)^2 - 8(x + 5) = 0.$

53. $\dfrac{1}{(x - 2)^2} - \dfrac{12}{x - 2} + 35 = 0.$

54. $\dfrac{2}{(x + 4)^2} + \dfrac{7}{x + 4} + 3 = 0.$

En los problemas del 55 al 76 resuelva por cualquier método.

55. $x^2 = \dfrac{x + 3}{2}.$

56. $\dfrac{x}{2} = \dfrac{7}{x} - \dfrac{5}{2}.$

57. $\dfrac{3}{x - 4} + \dfrac{x - 3}{x} = 2.$

58. $\dfrac{2}{x - 1} - \dfrac{6}{2x + 1} = 5.$

59. $\dfrac{6x + 7}{2x + 1} - \dfrac{6x + 1}{2x} = 1.$

60. $\dfrac{6(w + 1)}{2 - w} + \dfrac{w}{w - 1} = 3.$

61. $\dfrac{2}{r - 2} - \dfrac{r + 1}{r + 4} = 0.$

62. $\dfrac{2x - 3}{2x + 5} + \dfrac{2x}{3x + 1} = 1.$

63. $\dfrac{y + 1}{y + 3} + \dfrac{y + 5}{y - 2} = \dfrac{14y + 7}{y^2 + y - 6}.$

64. $\dfrac{3}{t + 1} + \dfrac{4}{t} = \dfrac{12}{t + 2}.$

65. $\dfrac{2}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x(x - 1)} = \dfrac{2}{x^2}.$

66. $5 - \dfrac{3(x + 3)}{x^2 + 3x} = \dfrac{1 - x}{x}.$

67. $\sqrt{2x - 3} = x - 3.$

68. $3\sqrt{x + 4} = x - 6.$

69. $q + 2 = 2\sqrt{4q - 7}.$

70. $x + \sqrt{4x} - 3 = 0.$

71. $\sqrt{x + 7} - \sqrt{2x} - 1 = 0.$

72. $\sqrt{x} - \sqrt{2x - 8} - 2 = 0.$

73. $\sqrt{x} - \sqrt{2x + 1} + 1 = 0.$

74. $\sqrt{y - 2} + 2 = \sqrt{2y + 3}.$

75. $\sqrt{x + 5} + 1 = 2\sqrt{x}.$

76. $\sqrt{\sqrt{x} + 2} = \sqrt{2x - 4}.$

En los problemas 77 y 78 encuentre las raíces, redondeadas a dos decimales.

77. $0.04x^2 - 2.7x + 8.6 = 0.$

78. $0.01x^2 + 0.2x - 0.6 = 0.$

79. Geometría El área de una pintura rectangular, con ancho 2 pulgadas menor que el largo, es de 48 pulgadas cuadradas. ¿Cuáles son las dimensiones de la pintura?

80. Temperatura La temperatura se ha elevado X grados por día durante X días. Hace X días fue de 15 grados. Hoy es de 51 grados. ¿Cuánto se ha elevado la temperatura por día? ¿Durante cuántos días se ha estado elevando?

81. Economía Una raíz de la ecuación económica

$$\overline{M} = \frac{Q(Q + 10)}{44}$$

es $-5 + \sqrt{25 + 44\overline{M}}$. Verifique esto utilizando la fórmula cuadrática para despejar Q en términos de $\overline{M}$. Aquí Q es el ingreso real y $\overline{M}$ es el nivel de oferta de dinero.

82. Dieta para ratas Un grupo de biólogos estudió los efectos nutricionales en ratas alimentadas con una dieta que contenía 10% de proteínas.[7] La proteína estaba compuesta de levadura y harina de maíz. Al cambiar el porcentaje P (expresado como un decimal) de levadura en la mezcla de la proteína, el grupo estimó que el promedio de aumento de peso g (en gramos) en una rata durante cierto periodo estaba dado por

$$g = -200P^2 + 200P + 20.$$

¿Cuál es el porcentaje de levadura que da un aumento promedio de peso de 70 gramos?

83. Dosis de droga Existen varias reglas para determinar las dosis de las medicinas para niños una vez especificadas las de los adultos. Tales reglas pueden tener como base el peso, la altura, etc. Si A es la edad del niño, d es la dosis para adulto y c la dosis para niño, a continuación se presentan dos reglas.

Regla de Young: $c = \dfrac{A}{A + 12}d.$

Regla de Cowling: $c = \dfrac{A + 1}{24}d.$

¿A qué edad las dosis para niños son las mismas usando estas reglas? Redondee al año más cercano.

[7]Adaptado de R. Bressani, "The use of Yeast in Human Foods", en R. I. Mateles y S. R. Tannenbaum (editores), *Single-Cell Protein* (Cambridge, MA: MIT Press, 1968).

84. Precio de envío de un bien En un estudio acerca del precio de envío de un bien desde una fábrica a un cliente, DeCaino[8] plantea y resuelve las dos ecuaciones cuadráticas siguientes

$$(2n - 1)v^2 - 2nv + 1 = 0,$$

y

$$nv^2 - (2n + 1)v + 1 = 0,$$

donde $n \geq 1$.

a. Resuelva la primera ecuación para v.
b. Resuelva la segunda ecuación para v si $v < 1$.

85. Óptica Un objeto está a 120 cm de una pared. Para enfocar la imagen del objeto sobre la pared, se utiliza una lente convergente con longitud focal de 24 cm. La lente se coloca entre el objeto y la pared, a una distancia de p centímetros del objeto, donde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{120 - p} = \frac{1}{24}.$$

Determine p, redondeada a un decimal.

86. Física Un termómetro con resistencias de platino, de ciertas especificaciones, opera de acuerdo con la ecuación

$$R = 10{,}000 + (4.124 \times 10^{-2})T - (1.779 \times 10^{-5})T^2,$$

donde R es la resistencia (en ohms) del termómetro a la temperatura T (en grados Celsius). Si $R = 13.946$, determine el valor correspondiente de T. Redondee su respuesta al grado Celsius más cercano. Suponga que tal termómetro sólo se utiliza si $T < 600°C$.

87. Movimiento Suponga que la altura h de un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba desde el piso está dada por

$$h = 44.1t - 4.9t^2,$$

donde h está en metros y t es el tiempo transcurrido en segundos.

a. ¿Después de cuántos segundos el objeto golpea el piso?
b. ¿Cuándo se encuentra a una altura de 88.2 m?

En los problemas del 88 al 93 utilice un programa para determinar las raíces reales de la ecuación. Redondee las respuestas a tres decimales. Para los problemas 88 y 89, confirme sus resultados de manera algebraica.

88. $2x^2 - 3x - 27 = 0.$

89. $8x^2 - 18x + 9 = 0.$

90. $15x^2 + 7x - 3 = 0.$

91. $27x^2 - \frac{11}{8}x + 5 = 0.$

92. $\frac{9}{2}z^2 - 6.3 = \frac{z}{3}(1.1 - 7z).$

93. $(\pi t - 4)^2 = 4.1t - 3.$

1.4 Deducción de la fórmula cuadrática

A continuación se presenta una deducción de la fórmula cuadrática. Suponga que $ax^2 + bx + c = 0$ es una ecuación cuadrática. Ya que $a \neq 0$, podemos dividir ambos miembros entre a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Si sumamos a ambos lados $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, entonces el miembro izquierdo se factoriza como el cuadrado de un binomio:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a},$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Esta ecuación tiene la forma $u^2 = k$, así, de la ecuación (4) en la sección 1.3,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

[8]S. J. DeCanio, "Delivered Pricing and Multiple Basing Point Equilibria: A Revolution", *Quarterly Journal of Economics,* XCIX, núm. 2 (1984), 329-349.

Resolviendo para x se obtiene

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

En resumen, las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por la **fórmula cuadrática:**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

1.5 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 1.1 ecuación   lado (miembro) de una ecuación   variable   raíz de una ecuación   conjunto solución   ecuaciones equivalentes   ecuación lineal (primer grado)   ecuación con literales   constante arbitraria

Sección 1.2 ecuación fraccionaria   conjunto vacío, $\varnothing$ solución extraña   ecuación radical

Sección 1.3 ecuación cuadrática (segundo grado)   fórmula cuadrática

Resumen

Cuando resolvemos una ecuación podemos aplicar ciertas reglas para obtener ecuaciones equivalentes, esto es, ecuaciones que tienen exactamente las mismas soluciones que la ecuación dada originalmente. Estas reglas incluyen la suma (o resta) del mismo polinomio en (de) ambos miembros, así como la multiplicación (o división) de ambos miembros por (entre) la misma constante, excepto por (entre) cero.

Una ecuación lineal (en x) es de primer grado y tiene la forma $ax + b = 0$, donde $a \neq 0$. Toda ecuación lineal tiene exactamente una raíz. Para resolver una ecuación lineal hay que aplicarle operaciones matemáticas hasta obtener una ecuación equivalente en la que la incógnita queda aislada en un lado de la ecuación.

Una ecuación cuadrática (en x) es de segundo grado y tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$. Tiene dos raíces reales y diferentes, exactamente una raíz real, o bien no tiene raíces. Una ecuación cuadrática puede resolverse por factorización o por medio de la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cuando se resuelve una ecuación fraccionaria o radical, con frecuencia se aplican operaciones que no garantizan que la ecuación resultante sea equivalente a la original. Estas operaciones incluyen la multiplicación de ambos miembros por una expresión que contenga a la variable, y elevar ambos miembros a la misma potencia. En estos casos, todas las soluciones obtenidas al final de tales procedimientos deben verificarse sustituyéndolas en la ecuación original. De esta manera se pueden encontrar las llamadas soluciones extrañas.

Problemas de repaso

Los problemas que tienen números a color se presentan así como sugerencia para formar parte de una evaluación de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 44 resuelva las ecuaciones.

1. $4 - 3x = 2 + 5x.$

2. $\frac{5}{7}x - \frac{2}{3}x = \frac{3}{21}x.$

3. $3[2 - 4(1 + x)] = 5 - 3(3 - x).$

4. $3(x + 4)^2 + 6x = 3x^2 + 7.$

5. $2 - w = 3 + w.$

6. $x = 2x.$

7. $x = 3x - (17 + 2x).$

8. $3x - 8 = 4(x - 2).$

9. $2(4 - \frac{3}{5}p) = 5.$

10. $\frac{5}{7}x - \frac{2}{3}x = \frac{3}{21}.$

11. $\dfrac{3x - 1}{x + 4} = 0.$

12. $\dfrac{5}{p + 3} - \dfrac{2}{p + 3} = 0.$

13. $\dfrac{2x}{x-3} - \dfrac{x+1}{x+2} = 1.$

14. $\dfrac{t + 3t + 4}{7 - t} = 12.$

15. $3x^2 + 2x - 5 = 0.$

16. $x^2 - 2x - 2 = 0.$

17. $5q^2 = 7q.$

18. $2x^2 - x = 0.$

19. $x^2 - 10x + 25 = 0.$

20. $r^2 + 10r - 25 = 0.$

21. $3x^2 - 7 = 1.$

22. $x(x - 9) = 0.$

23. $(8t - 5)(2t + 6) = 0.$

24. $2(x^2 - 1) + 2x = x^2 - 6x + 1.$

25. $-3x^2 + 5x - 1 = 0.$

26. $y^2 = 6.$

27. $x^2(x^2 - 9) = 4(x^2 - 9).$

28. $4x^2(x - 5) - 9(x - 5) = 0.$

29. $\dfrac{6w + 7}{2w + 1} - \dfrac{6w + 1}{2w} = 1.$

30. $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{4}{x} - \dfrac{12}{x+2} = 0.$

31. $\dfrac{2}{x^2 - 9} - \dfrac{3x}{x+3} = \dfrac{1}{x-3}.$

32. $\dfrac{3}{x^2 - 4} + \dfrac{2}{x^2 + 4x + 4} - \dfrac{4}{x+2} = 0.$

33. $\sqrt{2x + 7} = 5.$

34. $\sqrt{3x - 4} = \sqrt{2x + 5}.$

35. $\sqrt[3]{11x + 9} = 4.$

36. $\sqrt{x^2 + 5x + 25} = x + 4.$

37. $\sqrt{y} + 6 = 5.$

38. $\sqrt{z^2 + 9} = 5.$

39. $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 6} = 7.$

40. $\sqrt{6x - 29} = x - 4.$

41. $x + 2 = 2\sqrt{4x - 7}.$

42. $\sqrt{3z} - \sqrt{5z + 1} + 1 = 0.$

43. $y^{2/3} + y^{1/3} - 2 = 0.$

44. $2y^{-2/3} - 5y^{-1/3} - 3 = 0.$

En los problemas del 45 al 52 resuelva la ecuación para la letra indicada.

45. $E = 4\pi k \dfrac{Q}{A};\ Q.$

46. $E_1 = i_2R_1 + i_3R_1 + i_2R_2;\ R_2.$

47. $n - 1 = C + \dfrac{C'}{\lambda^2};\ C'.$

48. $\sigma = \dfrac{n_0 - n_e}{\lambda}L;\ n_0.$

49. $T^2 = 4\pi^2\left(\dfrac{L}{g}\right);\ T.$

50. $s = \dfrac{1}{2}at^2;\ t.$

51. $mgh = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}I\omega^2;\ \omega.$

52. $P = \dfrac{E^2}{R + r} - \dfrac{E^2 r}{(R + r)^2};\ E.$

53. Electricidad En estudios de redes eléctricas, aparece la ecuación siguiente:

$$S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{LC} = 0.$$

Demuestre que

$$S = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

54. Electricidad En un circuito eléctrico, se dice que hay resonancia cuando

$$2\pi f_r L = \frac{1}{2\pi f_r C},$$

donde f_r es una frecuencia de resonancia, L la inductancia y C la capacitancia. Resuelva para f_r *si* $f_r > 0$.

En los problemas 55 y 56 utilice una calculadora gráfica para determinar cuáles, si los hay, de los números dados son raíces de la ecuación dada.

55. $12x^3 + 61x = 83x^2 - 30;\ 4, 6, \frac{5}{4}.$

56. $\sqrt{t^2 + 4} = t + 1;\ \frac{2}{3}, \frac{14}{3}, \frac{3}{2}.$

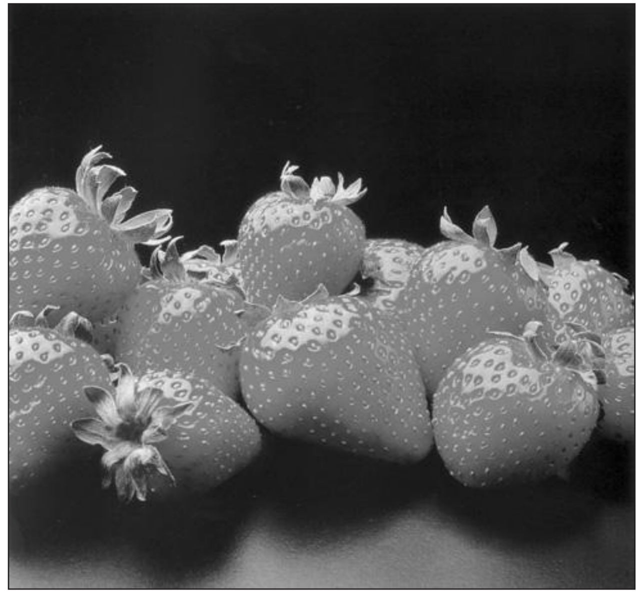
En los problemas 57 y 58 utilice un programa para determinar las raíces reales de la ecuación. Redondee sus respuestas a tres decimales.

57. $5.6 - 7.2x - 19.3x^2 = 0.$

58. $(9x - 3)^2 - \dfrac{7}{6}(x - 2) = 18.$

Aplicación práctica

Crecimiento real de una inversión[9]



Cuando hablamos de crecimiento real de una inversión, nos estamos refiriendo al crecimiento en su poder de compra, esto es, al aumento en la cantidad de bienes que la inversión puede comprar. El crecimiento real depende de la influencia tanto del interés como de la inflación. El interés eleva el valor de la inversión, mientras que la inflación baja su crecimiento por el incremento en los precios, de ahí que disminuya su poder de compra. Por lo general, la tasa de crecimiento real no es igual a la diferencia entre la tasa de interés y la de la inflación, sino que se describe por una fórmula diferente conocida como "efecto de Fisher".

Puede entender el efecto de Fisher considerando cuidadosamente la siguiente pregunta. Durante el año 1998, la tasa anual de interés fue de 8.35% y la tasa anual de inflación de 1.6% (*fuente*: Oficina de Censos de Estados Unidos. Resumen estadístico de 1999 de Estados Unidos, `www.census.gov/statab/www/freq.html`). Bajo estas circunstancias, ¿cuál fue la tasa anual real de crecimiento de una inversión? Podría pensar que la respuesta se obtiene simplemente restando los porcentajes: 8.35% − 1.6% = 6.75%. Sin embargo, 6.75% no es la respuesta correcta.

Suponga que se analiza la situación en términos más específicos. Considere fresas que se venden a $1.00 por libra, y suponga que a causa de la inflación, este precio aumenta a una tasa de 1.6% en un año. De junio de 1998 a junio de 1999, el precio por libra se elevó de $1.00 a

$$\$1.00 + (1.6\% \text{ de } \$1.00) = \$1.016.$$

Por otra parte, considere 100 dólares invertidos en junio de 1998 a una tasa de interés anual de 8.35%. En junio de 1999 el interés ganado es de $100(0.0835), de modo que la cantidad acumulada es

$$\$100 + \$100(0.0835) = \$108.35.$$

Ahora, compare el poder de compra de 100 dólares en junio de 1998 con el de $108.35 en junio de 1999. En 1998, los 100 dólares compraban 100 libras de fresas a $1.00 por libra. En 1999 las fresas estaban a $1.016 por libra, de modo que la cantidad acumulada de $108.35 compró $108.35/1.016 \approx 106.64$ libras de fresas (el símbolo $\approx$ significa *aproximadamente igual a*).

¿Qué cambio ocurrió en el poder de compra de la inversión? Se incrementó de 100 a 106.64 libras, un incremento de 6.64%. Esto es,

$$\frac{\text{cantidad nueva} - \text{cantidad inicial}}{\text{cantidad inicial}} = \frac{106.64 - 100}{100}$$

$$= 0.0664 = 6.64\%.$$

Así, 6.64% es el crecimiento real, que es menor a la diferencia del 8.35% − 1.6% = 6.75%. Realmente esta diferencia no tiene significado, ya que los tres porcentajes se refieren a tres cantidades diferentes: (a) interés (una fracción de la inversión −8.35% de $100), (b) inflación (una fracción del precio por unidad de los bienes −1.6% de $1.00) y (c) la tasa de crecimiento real (un porcentaje del poder de compra −6.64% de la cantidad inicial de fresas).

Para deducir una fórmula de la tasa de crecimiento real, g, sean y la tasa anual de interés (el rendimiento) e i la tasa anual de inflación. En un año, una inversión de P dólares (el capital o principal) gana un interés de $y \cdot P$ dólares, de modo que produce una cantidad acumulada en (dólares) de

$$P + y \cdot P = P(1 + y) \quad \text{(factorizando).}$$

En un año el precio de los bienes, digamos p dólares por unidad, aumenta $i \cdot p$ dólares a un nuevo precio de

$$p + i \cdot p = p(1 + i)$$

dólares por unidad. El poder de compra inicial representa la cantidad inicial de bienes:

$$\text{cantidad inicial} = \frac{\text{cantidad}}{\text{precio inicial}} = \frac{P}{p}.$$

[9]Adaptado de Yves Nievergelt, "Fisher's Effect: Real Growth Is Not Interest Less Inflation", *Mathematics Teacher*, 81 (octubre de 1988), 546-547. Con permiso de National Council of Teachers of Mathematics.

Un año después, la nueva cantidad de bienes que la cantidad acumulada de la inversión compraría al nuevo precio está dada por

$$\text{nueva cantidad} = \frac{\text{nuevo saldo}}{\text{nuevo precio}} = \frac{P(1+y)}{p(1+i)}.$$

En consecuencia, la tasa de crecimiento, o cambio relativo, del poder de compra está dada por

$$g = \frac{\text{cantidad nueva} - \text{cantidad inicial}}{\text{cantidad inicial}}$$

$$= \frac{\dfrac{P(1+y)}{p(1+i)} - \dfrac{P}{p}}{\dfrac{P}{p}}.$$

Multiplicando el numerador y el denominador por p/P se obtiene

$$g = \frac{1+y}{1+i} - 1$$

$$= \frac{(1+y)-(1+i)}{1+i} = \frac{y-i}{1+i}.$$

Así, la tasa real de crecimiento está dada por la ecuación con literales

$$g = \frac{y-i}{1+i}. \qquad \textbf{(1)}$$

La relación en la ecuación (1) es el efecto de Fisher.[10] Para ilustrar su uso, aplíquela al ejemplo anterior, en donde $y = 8.35\%$ e $i = 1.6\%$. La fórmula de Fisher da

$$g = \frac{0.0835 - 0.016}{1 + 0.016} \approx 0.0664 = 6.64\%.$$

Ejercicios

1. Durante 1994, la tasa promedio de interés promediaba 7.15% cuando la inflación estaba en 2.6%.
   - **a.** Calcule el monto acumulado de una inversión de \$100 después de un año a 7.15%.
   - **b.** Si una libra de chabacano seco costó \$10 en enero de 1994, ¿cuánto costó un año después?
   - **c.** Si una libra de chabacano seco costó \$10 en enero de 1994, ¿qué cantidad de chabacanos se compraron con \$100 en 1994?
   - **d.** Un año después, ¿qué cantidad de chabacanos se compraron con la cantidad acumulada [véase la parte (a)]?
   - **e.** Utilice los resultados de las partes (c) y (d) para calcular la tasa real de crecimiento por medio de la ecuación

     $$g = \frac{\text{cantidad nueva} - \text{cantidad inicial}}{\text{cantidad inicial}}.$$
   - **f.** Verifique su respuesta de la parte (e) por medio de la fórmula de Fisher.
2. Determine la tasa real de crecimiento, dadas una tasa de interés de 10% y una tasa de inflación de 5%.
3. Determine la tasa real de crecimiento, dadas una tasa de interés de 1% y una tasa de inflación de 3%. ¿Qué significa la respuesta? ¿Tiene sentido en vista de la información dada?

[10] Irving Fisher, "Appreciation and Interest", *Publications of the American Economic Association*, tercera serie, 11 (agosto de 1986), 331-442.